

Ansgar Beckermann
Einführung in die Logik,
3. Aufl.,
Berlin/New York: Walter de Gruyter 2011

Lösungen der Übungsaufgaben

Lösungen zu Kapitel 2

1. Die Texte (b), (d) und (e) enthalten keine Argumente. (In (e) gibt Aristoteles zwar einen *Grund* an, warum Gerüche undeutlicher sind als Farben und Töne, aber er will den Leser damit nicht von dieser These überzeugen. Vielmehr setzt er sie als bekannt voraus.)

a) Es ist möglich, dass das Seiende wirklich vorhanden ist.
 Das Nichtseiende ist unmöglich.
 Also: Nur das Seiende gibt es.

c) Wenn der Determinismus wahr ist, dann sind unsere Handlungen durch die Naturgesetze und längst vergangene Ereignisse bestimmt.

Längst vergangene Ereignisse hängen nicht von uns ab.
 Die Naturgesetze hängen nicht von uns ab.

Also: Unsere gegenwärtigen Handlungen hängen nicht von uns ab.

f) Alle Menschen streben, zum Guten zu gelangen.

Man wird gut durch Erlangung des Guten.

Würden die Bösen das Gute erreichen, dann wären sie nicht böse.

Also: Die Guten erlangen, was sie erstreben, die Bösen aber nicht.

Also: Die Guten sind mächtig, die Bösen aber schwach.

Nach dieser Rekonstruktion – es ist nicht die einzig mögliche – besteht das Argument aus zwei Teilargumenten: Zuerst argumentiert Boethius für die These, dass die Guten erlangen, was sie erstreben, die Bösen aber nicht. Dann folgert er daraus, dass nur die Guten mächtig sind.

g) Wäre der Äquator eine menschliche Erfindung, so könnten wir nichts Positives von ihm aussagen in Bezug auf eine Zeit, bevor Menschen vom Äquator redeten.

Also: Der Äquator ist keine menschliche Erfindung.

Frege setzt dabei voraus, dass wir selbstverständlich etwas Positives über den Äquator sagen können auch in Bezug auf Zeiten, bevor Menschen vom Äquator redeten. Häufig ist es hilfreich, solche versteckten Prämissen ausdrücklich in die Normalform aufzunehmen:

g') Wäre der Äquator eine menschliche Erfindung, so könnten wir nichts Positives von ihm aussagen in Bezug auf eine Zeit, bevor Menschen vom Äquator redeten.

Wir können etwas Positives vom Äquator aussagen in Bezug auf eine Zeit, bevor Menschen vom Äquator redeten.

Also: Der Äquator ist keine menschliche Erfindung.

Zusatzaufgabe: Finden Sie die versteckte Prämisse in Argument (c)!

Lösungen zu Kapitel 3

- (b), (c) und (f) sind Aussagesätze, (a), (d) und (e) nicht.
- Zum Beispiel: „Im Jahr 1856 fiel auf das Gebiet des heutigen Bielefeld eine ungerade Zahl von Regentropfen.“
- In (a): 'Heute', 'wir' (zweimal), 'hier', 'morgen', 'dort'.
In (b): 'Sie' (zweimal), 'dies'.
In (c) kommt kein indexikalischer Ausdruck vor. (Der Satz ist wahr, egal in welchem Kontext er geäußert wird.)
In (d): 'Jetzt'.
- Das Buch enthält fast eine halbe Million *Vorkommnisse (Token)* der 30 Buchstaben-Typen des deutschen Alphabets.
- Dieser Satz enthält zwar keine indexikalischen Ausdrücke, trotzdem hängt seine Wahrheit davon ab, in welchem Kontext er geäußert wird.
 - 'Groß' ist ein vages Prädikat, und vielleicht ist Bielefeld gerade ein Grenzfall: weder eindeutig groß noch eindeutig nicht groß. Der Satz ist dann weder eindeutig wahr noch eindeutig falsch.
 - Wenn dieser Satz wahr ist, dann müsste das, was er sagt, tatsächlich der Fall sein, d.h., er müsste falsch sein. Also kann der Satz nicht wahr sein. Wenn er aber falsch ist, dann ist er wahr – denn genau das sagt er! Manche Logiker meinen, dass paradoxe Sätze wie dieser in der Tat sowohl wahr als auch falsch sind, oder weder wahr noch falsch.
 - Gemäß den Erzählungen von Arthur Conan Doyle wohnte Sherlock Holmes tatsächlich in der Baker Street. Doch in Wirklichkeit wohnte dort nie ein Mensch dieses Namens. In einem gewissen Sinn ist der Satz also wahr, in einem anderen falsch. Wichtig ist, dass man sich hier auf eine Lesart festlegt, und nicht mitten in einem Argument zur anderen wechselt.

Lösungen zu Kapitel 4

- Bei gültigen, aber nicht schlüssigen Argumenten ist mindestens eine der Prämissen falsch. Sofern es sich bei den Prämissen nicht um Aussagen zur Logik handelt, fällt es nicht in den Bereich der Logik, über ihre Wahrheit oder Falschheit zu entscheiden. In der Logik geht es deshalb vor allem um die Gültigkeit von Argumenten.
- Das Argument ist ungültig.
 - Auch dieses Argument ist ungültig.
 - Das Argument ist gültig, vorausgesetzt dass man nur etwas wissen kann, was tatsächlich wahr ist. Es ist allerdings fragwürdig, ob die erste Prämisse stimmt, und damit, ob das Argument schlüssig ist.
 - Das Argument ist gültig: Weil die Konklusion unmöglich falsch sein kann, ist es in jedem Fall rational, sie für wahr zu halten, auch dann, wenn die Prämisse wahr ist. Da diese in der Tat wahr ist, ist das Argument nicht nur gültig, sondern schlüssig. Gut ist es trotzdem nicht, weil Prämisse und Konklusion nichts miteinander zu tun haben.
 - Das Argument ist gültig und schlüssig, aber uninformativ.

Lösungen zu Kapitel 5

- Die Aussagen (b) und (e) sind wahr. (a) und (d) gelten nicht allgemein, (c) ist sinnlos, weil der Ausdruck 'wahr' auf Argumente nicht anwendbar ist.
- Zum Beispiel
Alle geraden Zahlen sind die Summe zweier Primzahlen.
Die Zahl der von Kurt Gödel verfassten Briefe ist gerade.
Also: Die Zahl der von Kurt Gödel verfassten Briefe ist die Summe zweier Primzahlen.
- Für jede beliebige These T lässt sich ein Argument konstruieren, zum Beispiel
Die Erde ist rund.
Also: T .
In der Regel ist dieses Argument natürlich ungültig. Es lässt sich aber auch ein gültiges finden, etwa
Die Erde ist rund und nicht rund.
Also: T .

Es ist jedoch nicht möglich, für jede These ein schlüssiges Argument zu finden.

Lösungen zu Kapitel 6

- Der erste Satz stimmt, der zweite aber nicht: Ein Argument kann weder deduktiv noch nicht-deduktiv gültig sein.
- Das Argument ist nicht-deduktiv, aber nicht deduktiv gültig, weil die Konklusion nicht wahr sein muss, wenn die Prämisse wahr ist. Es könnte zum Beispiel heute Nacht ein großer Meteorit die Erde aus dem Sonnensystem heraus in die Leere des interstellaren Raums schleudern.
- Das Argument ist nicht gültig: Sofern nicht eine merkwürdige Verschwörung im Gange ist, hängt der Ausgang von Fußballspielen nicht davon ab, wer im Fernsehen zuschaut. Die Prämisse stützt also nicht die Konklusion.
Interessant ist, dass dieses Argument formal genau gleich aussieht wie das induktiv gültige Argument aus Aufgabe 2. Es ist deshalb sehr schwer, allgemeine Kriterien für nicht-deduktive Gültigkeit zu formulieren.
- Das Argument ist nicht-deduktiv gültig, wenn man zum Beispiel diese Prämisse hinzunimmt:
Die meisten Kugeln in der Urne sind grün.
Deduktiv gültig wird es zum Beispiel durch diese Prämisse:
Die Urne enthält außer 10 roten nur grüne Kugeln.

Lösungen zu Kapitel 7

- Die Argumente (a), (c) und (d) haben dieselbe Form, nämlich
Kein S ist M
Einige P sind M
Also: Nicht alle P sind S.
- Zum Beispiel:
Logik ist mühsam oder alles wird gut.
Logik ist nicht mühsam.
Also: Alles wird gut.
Oder:
Es regnet oder es regnet nicht.
Es regnet nicht.
Also: Es regnet nicht.

Lösungen zu Kapitel 8

- (a), (d) und (g) sind analytisch, (b) und (c) synthetisch, (d) ist logisch determiniert. (e) ist überhaupt nicht wahr. Dass dieser Satz falsch ist, liegt jedoch nicht nur an der Bedeutung der in ihm vorkommenden Ausdrücke, sondern vor allem daran, dass Bleistifte eben in Wirklichkeit nicht aus Blei sind. Solche Sätze könnte man 'synthetisch falsch' nennen. (f) ist ein Grenzfall: Gehört es zur Bedeutung von 'Blei', dass Blei ein Metall ist? Wenn ja, ist der Satz analytisch, wenn nicht, synthetisch.
- Ja.
- Es gibt keine scharfe und allgemein akzeptierte Abgrenzung zwischen logischen und deskriptiven Ausdrücken. 'Fagott', 'heilig', 'Logik' und 'zwischen' sind wohl eher deskriptiv, 'alle' und 'oder' logisch. 'trotzdem' und 'weil' haben sowohl deskriptive als auch logische Aspekte. Der Status von 'identisch' und 'wahr' ist umstritten.

Lösungen zu Kapitel 9

- a) Hans ist schneller als der Bote des Königs.
Also: Jemand ist schneller als der Bote des Königs.
 - b) Computer sind schwer durchschaubar.
Deep Blue ist ein Computer.
Also: Deep Blue ist schwer durchschaubar.
 - c) Kurt Gödel und Gerhard Gentzen sind nicht reich.
Also: Kurt Gödel ist nicht reich.
 - d) Suppe ist besser als trockenes Brot.
Ein Butterbrot ist besser als Suppe.
Also: Ein Butterbrot ist besser als trockenes Brot.
- Der Hofnarr argumentierte:
Wenn es stimmt, was der König in seiner Ankündigung sagte, dann gibt es ein schlüssiges Argument, welches beweist, dass der König nicht immer die Wahrheit sagte. Die Konklusion eines (deduktiv) schlüssigen Arguments muss wahr sein. In diesem Fall sagte der König also tatsächlich nicht immer die Wahrheit. Wenn es aber nicht stimmt, was der König sagte, dann war seine Ankündigung falsch, folglich sagte er auch dann nicht immer die Wahrheit. Also, egal ob es stimmt oder nicht, der König sagte in jedem Fall nicht immer die Wahrheit.

3. Nach der Argumentation des Hofnarren ist mindestens einer der Sätze in der Ankündigung des Königs falsch. Der erste Satz kann es nicht sein, denn der Hofnarr hatte ja das Argument gefunden. Also war der zweite Satz falsch. Der zweite Satz aber lautete: „Dieser wird mein Königreich erben.“

Lösungen zu Kapitel 10

Abschnitt 10.1

- ‘Die Tüte’ enthält sieben Buchstaben.
 - „Alle metaphysischen Sätze sind sinnlos“ ist ein metaphysischer Satz.
 - ‘Berlin’ bezeichnet Berlin, aber Bielefeld bezeichnet nicht Bielefeld.
Es gibt einige andere Lösungen, etwa:
‘Berlin’ bezeichnet Berlin, aber ‘Bielefeld’ bezeichnet nicht ‘Bielefeld’.
 - ‘Suppe’ angehängt an ‘Erbsen’ ergibt ‘Erbsensuppe’. (Genau genommen ergibt es ‘ErbsenSuppe’.)
 - „angehängt an sein eigenes Zitat“ angehängt an sein eigenes Zitat“ ist ein Ausdruck, der sich selbst bezeichnet.
Oder: ‘angehängt an sein eigenes Zitat’ angehängt an sein eigenes Zitat ist ein Ausdruck, der sich selbst bezeichnet.
- Wenn zum Beispiel in einem deutschen Buch über die deutsche Sprache geschrieben wird, dann ist Deutsch gleichzeitig Objekt- und Metasprache. (Einige der wichtigsten Ergebnisse der neueren Logik beruhen darauf, dass so etwas auch in formalen Sprachen möglich ist.)

Abschnitt 10.2

- (b), (c), (e), (f), (h), (j), (l), (n), (q), (r) sind Sätze von AL.
- $p \wedge q$
 - $r \vee s$
 - $q \leftrightarrow t$
 - $t \wedge \neg q$
 - $p \rightarrow q \vee p$
 - $(\neg(\neg p \rightarrow s) \vee p) \wedge (t \leftrightarrow \neg q)$

3. So sehen die Sätze mit voller Klammerung aus. (Es gibt keine anderen richtigen Lösungen!)

- $(\neg p \rightarrow q)$
- $\neg\neg q$
- $((p \wedge q) \rightarrow p)$
- $((\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow ((p \leftrightarrow q) \vee r))$
- $((p \vee \neg((p \wedge p) \rightarrow (p \vee \neg\neg\neg p))) \rightarrow \neg\neg p)$

4. (a), (c) und (e) sind Subjunktionen, (b) ist eine Negation, (d) eine Bisubjunktion.

Abschnitt 10.3

- $(A \rightarrow B)$ ist genau dann *falsch* bzgl. einer Bewertung V , wenn A wahr und B falsch ist bzgl. V .
 - $(A \leftrightarrow B)$ ist genau dann *falsch* bzgl. einer Bewertung V , wenn A wahr und B falsch ist bzgl. V oder wenn A falsch und B wahr ist bzgl. V .
- (b), (e), (f) und (g) sind wahr bzgl. V_1 , (a), (c), (d) falsch.
- Der Satz ‘ $\neg(p \wedge q) \rightarrow p \wedge \neg q$ ’ ist wahr bzgl. jeder Bewertung, bzgl. deren p wahr ist, und falsch bzgl. jeder Bewertung, bzgl. deren p falsch ist. Die folgende Bewertung V_2 ist zum Beispiel eine Bewertung, bzgl. deren der Satz wahr ist:

$V_2(p)$ = In der Schweiz gibt es Berge;

$V_2(q)$ = Alle Berge sind vulkanischen Ursprungs.

Dagegen ist der Satz falsch bzgl. der Bewertung V_3 :

$V_3(p)$ = In der Schweiz gibt es keine Berge;

$V_3(q)$ = Alle Berge sind vulkanischen Ursprungs.

- Wenn man die Leerstelle von „Es ist nicht der Fall, dass...“ durch einen wahren Satz ergänzt, erhält man einen falschen Satz und umgekehrt. Der Operator ist also wahrheitsfunktional.
 - „... und ...“ ist weitgehend wahrheitsfunktional.
 - „... folgt logisch aus ...“ ist nicht wahrheitsfunktional. Ob ein Satz aus einem anderen logisch folgt, hängt nicht nur von der Wahrheit der beiden Sätze ab. So kann aus etwas Falschem sowohl etwas Wahres als auch etwas Falsches folgen.

- (d) „Es ist absolut sicher, dass ...“ ist nicht wahrheitsfunktional. Vielleicht kann nichts, was falsch ist, absolut sicher sein. Aber auf jeden Fall ist nicht alles, was wahr ist, absolut sicher.
- (e) „Der Papst glaubt, dass ...“ ist nicht wahrheitsfunktional – nicht einmal, wenn der Papst unfehlbar ist. Denn auch dann kann es noch wahre Sätze A geben, die der Papst nicht glaubt, für die also „Der Papst glaubt, dass A “ falsch ist. Nur wenn der Papst nicht nur unfehlbar, sondern auch allwissend wäre, wäre „Der Papst glaubt, dass ...“ wahrheitsfunktional.
- (f) „Entweder ... oder eben nicht“ ist wahrheitsfunktional. Jeder Satz der Form „Entweder A oder eben nicht“ ist wahr – egal, ob A wahr oder falsch ist.

5. Wahrheitstafel für ‘|’:

A	B	$A B$
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	W

6. Es gibt vier einstellige wahrheitsfunktionale Satzoperatoren. Ihre Wahrheitstabellen sehen so aus (* vertritt hier den Namen des Operators):

A	$*A$	$*A$	$*A$	$*A$
W	W	W	F	F
F	W	F	W	F

Der dritte dieser Operatoren entspricht dem Negationszeichen von AL. Bei den zweistelligen Operatoren gibt es bereits 16 Möglichkeiten, bei den dreistelligen 256, und allgemein $2^{(2^n)}$ für n -stellige Operatoren.

Lösungen zu Kapitel 11

1. (b), (c) und (d) treffen zu. Die Aussagen (a) und (e) sind falsch, (f) und (g) sinnlos: Nur Argumente können gültig sein, und Sätze

von AL sind, für sich allein, weder wahr noch falsch – sie sind wahr oder falsch immer nur bzgl. einer bestimmten Bewertung.

2. Bedingung (e).

3. Ja.

4. (a) Wenn A eine Tautologie ist, dann ergibt sich allein aus den Bedingungen der Definition 10.3, dass A bzgl. aller Bewertungen von AL wahr ist. Folglich ist A auch bzgl. all jener Bewertungen wahr, bzgl. deren B wahr ist. D.h., es ergibt sich allein aus den Bedingungen der Definition 10.3, dass für alle Bewertungen V gilt: Ist B wahr bzgl. V , dann ist auch A wahr bzgl. V . Also folgt A logisch aus B .

(b) Wenn A eine Tautologie ist, dann ist A wahr bzgl. aller Bewertungen von AL. Wenn außerdem $A \models_{AL} B$, dann ist B wahr bzgl. aller Bewertungen, bzgl. deren A wahr ist – d.h. bzgl. ausnahmslos aller Bewertungen (beides ergibt sich aus Definition 10.3). Folglich ist B in diesem Fall ebenfalls eine Tautologie.

5. Sei V eine beliebige Bewertung von AL. V ordnet dem Satzbuchstaben ‘ p ’ eine Wahrheitsbedingung zu. Entweder ist diese Wahrheitsbedingung erfüllt oder nicht. Im ersten Fall ist nach Definition 10.3.(i) ‘ p ’ wahr bzgl. V , und folglich auch ‘ $p \rightarrow p$ ’, weil nach 10.3.(v) eine Subjunktion wahr ist, wenn ihr Hinterglied wahr ist. Im zweiten Fall ist nach 10.3. (i) ‘ p ’ falsch bzgl. V . Auch dann ist ‘ $p \rightarrow p$ ’ wahr bzgl. V , weil nach 10.3. (v) eine Subjunktion wahr ist, wenn ihr Vorderglied falsch ist. ‘ $p \rightarrow p$ ’ ist also wahr bzgl. jeder beliebigen Bewertung V von AL.

6. a) Nach Definition 11.4 ist $A \models_{AL} B$ genau dann wahr, wenn für alle Bewertungen V gilt: Ist A wahr bzgl. V , dann ist auch B wahr bzgl. V – d.h. wenn es keine Bewertung gibt, bzgl. deren A wahr ist und B falsch. Nach Definition 10.3.(v) ist $A \rightarrow B$ nun aber genau dann falsch bzgl. einer Bewertung, wenn A wahr und B falsch ist bzgl. dieser Bewertung (vgl. Aufgabe 1. zu Abschnitt 10.3). Folglich gilt $A \models_{AL} B$ genau dann, wenn $A \rightarrow B$ wahr ist bzgl. jeder Bewertung, wenn also $\models_{AL} A \rightarrow B$.

b) Nach Definition 11.5 ist $A \models_{AL} B$ genau dann wahr, wenn für alle Bewertungen V gilt: A ist genau dann wahr bzgl. V , wenn B wahr ist bzgl. V – d.h. wenn bzgl. aller Bewertungen A und B entweder beide wahr sind oder beide falsch. Nach Definition 10.3. (vi) ist $A \leftrightarrow B$ wiederum genau dann wahr

bzgl. einer Bewertung, wenn bzgl. dieser Bewertung A und B entweder beide wahr sind oder beide falsch. Folglich gilt $A \models_{\text{AL}} B$ genau dann, wenn $A \leftrightarrow B$ wahr ist bzgl. jeder Bewertung, wenn also $\models_{\text{AL}} A \leftrightarrow B$.

Lösungen zu Kapitel 12

1. a) ' $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ ' ist eine Tautologie:

p	q	$(p \rightarrow q)$	\vee	$(q \rightarrow p)$
W	W	W	W	W
W	F	F	W	W
F	W	W	W	F
F	F	W	W	W

b) ' $\neg(p \rightarrow q) \wedge \neg p$ ' ist eine Kontradiktion:

p	q	\neg	$(p \rightarrow q)$	\wedge	$\neg p$
W	W	F	W	F	F
W	F	W	F	F	F
F	W	F	W	F	W
F	F	F	W	F	W

c) ' $p \rightarrow \neg((p \vee q) \wedge \neg q)$ ' ist weder eine Tautologie noch eine Kontradiktion:

p	q	p	\rightarrow	\neg	$((p \vee q) \wedge \neg q)$
W	W	W	W	W	F
W	F	F	F	W	W
F	W	W	W	W	F
F	F	W	W	F	W

d) ' $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ ' ist eine Tautologie:

p	q	$(p \rightarrow q)$	\rightarrow	p
W	W	W	W	W
W	F	F	W	W
F	W	W	F	W
F	F	W	F	W

e) ' $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \wedge q))$ ' ist eine Tautologie:

p	q	$(p \leftrightarrow q)$	\leftrightarrow	$((p \vee q) \rightarrow (p \wedge q))$
W	W	W	W	W
W	F	F	W	F
F	W	F	W	F
F	F	W	W	F

f) ' $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)$ ' ist weder eine Tautologie noch eine Kontradiktion:

p	q	r	$(p \rightarrow r)$	\vee	$(q \rightarrow r)$	\rightarrow	$(p \vee q \rightarrow r)$
W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	F	F	F	W	F
W	F	W	W	W	W	W	W
W	F	F	F	W	W	F	F
F	W	W	W	W	W	W	W
F	W	F	W	W	F	F	F
F	F	W	W	W	W	W	W
F	F	F	W	W	W	W	W

2. a) Die Aussage ' $p \models_{AL} \neg p \vee q$ ' ist falsch:

p	q	p	$\neg p$	\vee	q
W	W	W	F	W	
W	F	W	F	F	
F	W	F	W	W	
F	F	F	W	W	

b) Die Aussage ' $p \rightarrow q \models_{AL} p \wedge r \rightarrow q$ ' ist wahr:

p	q	r	$p \rightarrow q$	$p \wedge r$	\rightarrow	q
W	W	W	W	W	W	
W	W	F	W	F	W	
W	F	W	F	W	W	
W	F	F	F	F	F	
F	W	W	W	F	W	
F	W	F	W	F	W	
F	F	W	W	F	W	
F	F	F	W	F	W	

c) Die Aussage ' $p \vee q \rightarrow r \models_{AL} (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$ ' ist wahr:

p	q	r	$p \vee q$	\rightarrow	r	$(p \rightarrow r)$	\vee	$(q \rightarrow r)$
W	W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	F	F	F	F	F
W	F	W	W	W	W	W	W	W
W	F	F	W	F	F	F	W	W
F	W	W	W	W	W	W	W	W
F	W	F	W	F	F	W	W	F
F	F	W	F	W	W	W	W	W
F	F	F	F	W	W	W	W	W

d) Die Aussage ' $p \leftrightarrow q, \neg(p \vee q) \models_{AL} p \wedge q$ ' ist falsch (zur Abwechslung einmal mit der zweiten Methode):

p	q	$(p \leftrightarrow q)$	\wedge	\neg	$(p \vee q)$	\rightarrow	$p \wedge q$
W	W	W	F	F	W	W	W
W	F	F	F	F	W	W	F
F	W	F	F	F	W	W	F
F	F	W	W	W	F	F	F

e) Die Aussage ' $\neg p \vee q \models_{AL} \neg q \vee p$ ' ist falsch (zweite Methode):

p	q	$\neg p$	\vee	q	\leftrightarrow	$\neg q$	\vee	p
W	W	F	W	W	W	F	W	
W	F	F	F	F	F	W	W	
F	W	W	W	W	F	F	F	
F	F	W	W	W	W	W	W	

3. Wie die Wahrheitstafel von ' $p \rightarrow \neg((p \vee q) \wedge \neg q)$ ' zeigt, ist dieser Satz falsch bzgl. aller Bewertungen, bzgl. deren ' p ' wahr und ' q ' falsch ist. Zum Beispiel:

- $V(p)$ = Kühe sind Säugetiere;
- $V(q)$ = Kühe können fliegen.

' $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)$ ' ist falsch bzgl. aller Bewertungen, bzgl. deren ' p ' wahr ist und ' q ' und ' r ' falsch, sowie bzgl. aller Bewertungen, bzgl. deren ' q ' wahr ist, ' p ' und ' r ' dagegen falsch. Zum Beispiel:

- $V(p)$ = Kühe können fliegen;
- $V(q)$ = Kühe sind Säugetier;
- $V(r)$ = Kühe können fliegen.

4. Der kürzeste mit ' $(p \wedge q) \vee \neg(\neg p \rightarrow q)$ ' logisch äquivalente Satz ist ' $p \leftrightarrow q$ '.

5. Es gibt mehrere Lösungen. Die einfachsten sind:
 $\neg(A \wedge B), \neg A \vee \neg B, A \rightarrow \neg B$ sowie $B \rightarrow \neg A$.

6. Hier eine der möglichen Lösungen:

Satzform von AL	Äquivalente Satzform mit ' '
$\neg A$	$A A$
$A \wedge B$	$(A B) (A B)$
$A \vee B$	$(A A) (B B)$
$A \rightarrow B$	$A (A B)$
$A \leftrightarrow B$	$(A B) ((A A) (B B))$

7. Wie die Lösung zu Aufgabe 5. zeigt, lässt sich '|' wahlweise durch '¬' und '∧', durch '¬' und '∨' oder durch '¬' und '→' definieren. Da '|' funktional vollständig ist, gilt das also auch für diese Paare von Operatoren.

Lösungen zu Kapitel 13

1. Der Satz ist eine Subjunktion. Nur die Regel (S) darf deshalb zur Entwicklung verwendet werden. Versuchen Sie nie, Entwicklungsregeln auf Teilsätze eines Satzes anzuwenden! Dies führt oft zu falschen Ergebnissen und ist mit unseren Regeln unvereinbar. Wenn Sie über die anzuwendende Regel unsicher sind, setzen Sie zuerst alle nach den Klammersparnisregeln weggelassenen Klammern ein. Der Beispielsatz sieht dann so aus: '((p ∧ ¬q) → (¬¬(p ∧ q) ∨ s))'. Die Form dieses Satzes ist offenbar (A → B).

2. a) '(p → q) ∨ (p → ¬q)' ist eine Tautologie:

- 1. √ $\neg((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \neg q))$ A
 - 2. √ $\neg(p \rightarrow q)$ (1)
 - 3. √ $\neg(p \rightarrow \neg q)$ (1)
 - 4. p (2)
 - 5. $\neg q$ (2)
 - 6. p (3)
 - 7. $\neg\neg q$ (3)
- x

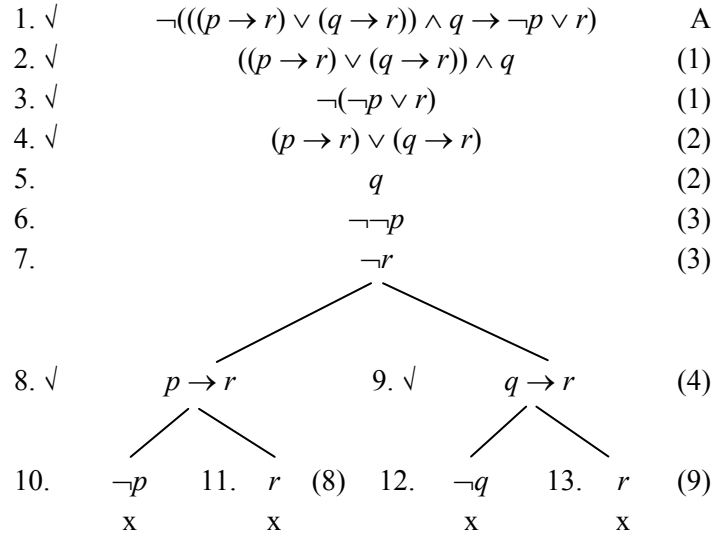
b) '(p ∧ ¬q) ∨ (q ∨ ¬p)' ist eine Tautologie:

- 1. √ $\neg((p \wedge \neg q) \vee (q \vee \neg p))$ A
 - 2. √ $\neg(p \wedge \neg q)$ (1)
 - 3. √ $\neg(q \vee \neg p)$ (1)
 - 4. $\neg q$ (3)
 - 5. $\neg\neg p$ (3)
-

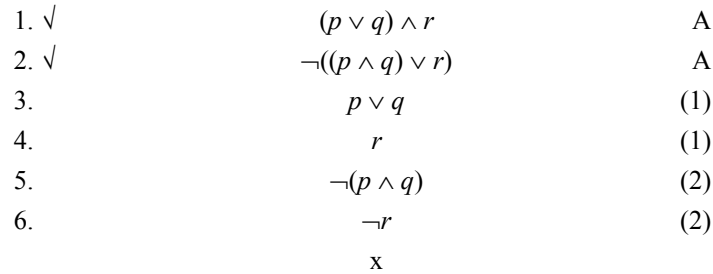
c) '((p → q) → (q → r)) → (p → r)' ist keine Tautologie (im Gegensatz zu dem sehr ähnlich aussehenden Satz (13)!):

- 1. √ $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r))$ A
 - 2. √ $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r)$ (1)
 - 3. √ $\neg(p \rightarrow r)$ (1)
 - 4. p (3)
 - 5. $\neg r$ (3)
-

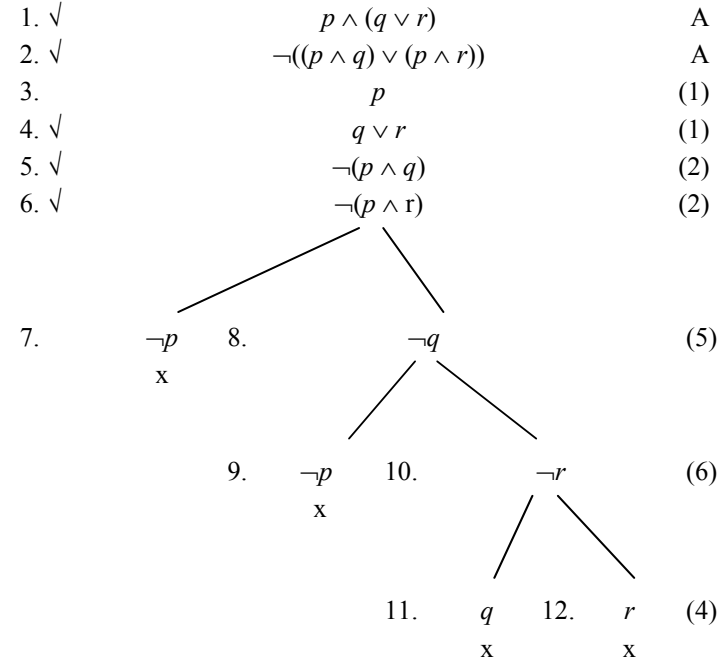
d) ‘ $((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)) \wedge q \rightarrow \neg p \vee r$ ’ ist eine Tautologie:



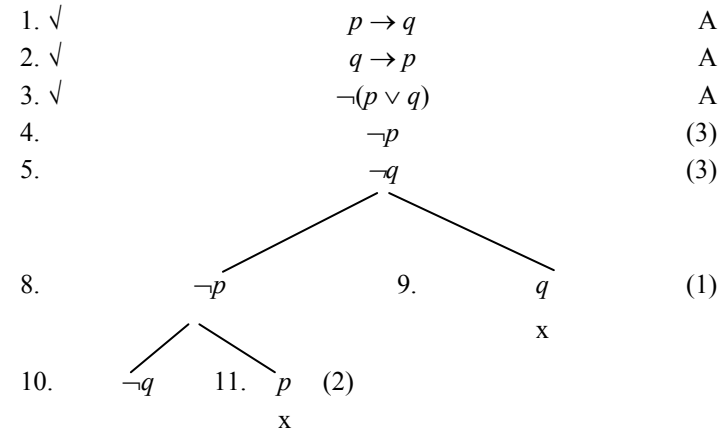
3. a) Die Aussage ‘ $(p \vee q) \wedge r \models_{AL} (p \wedge q) \vee r$ ’ ist wahr:



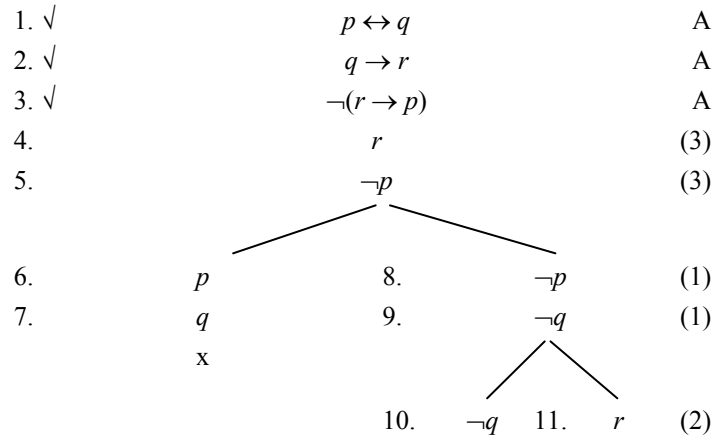
b) Die Aussage ‘ $p \wedge (q \vee r) \models_{AL} (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ’ ist wahr:



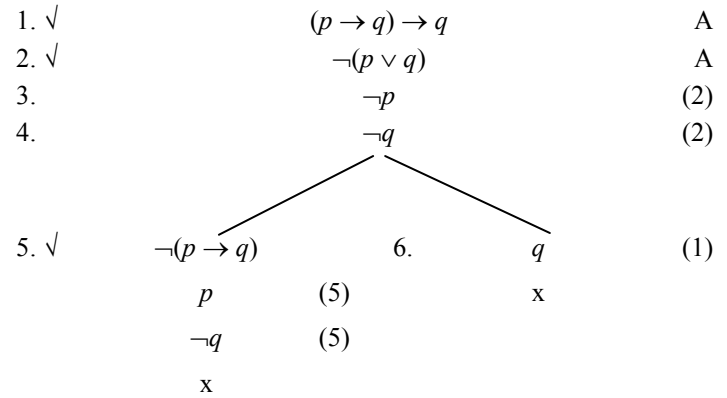
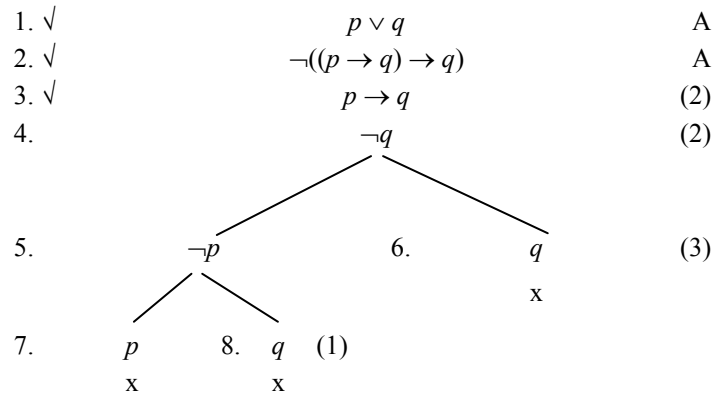
c) Die Aussage ‘ $p \rightarrow q, q \rightarrow p \models_{AL} p \vee q$ ’ ist falsch:



d) Die Aussage ' $p \leftrightarrow q, q \rightarrow r \models_{AL} r \rightarrow p$ ' ist falsch:



e) Die Aussage ' $p \vee q \models_{AL} (p \rightarrow q) \rightarrow q$ ' ist wahr. Wir zeigen erst, dass $p \vee q \models_{AL} (p \rightarrow q) \rightarrow q$, anschließend, dass $(p \rightarrow q) \rightarrow q \models_{AL} p \vee q$.



4. Siehe nächste Seite.

5. Auf den beiden offenen Ästen des Wahrheitsbaums für den Satz (c) von Aufgabe 2 stehen jeweils die Sätze ' p ', ' $\neg r$ ' und ' $\neg q$ '. Jede Bewertung, bzgl. deren ' p ' wahr ist und ' q ' und ' r ' falsch sind, ist also ein Gegenbeispiel. Etwa:

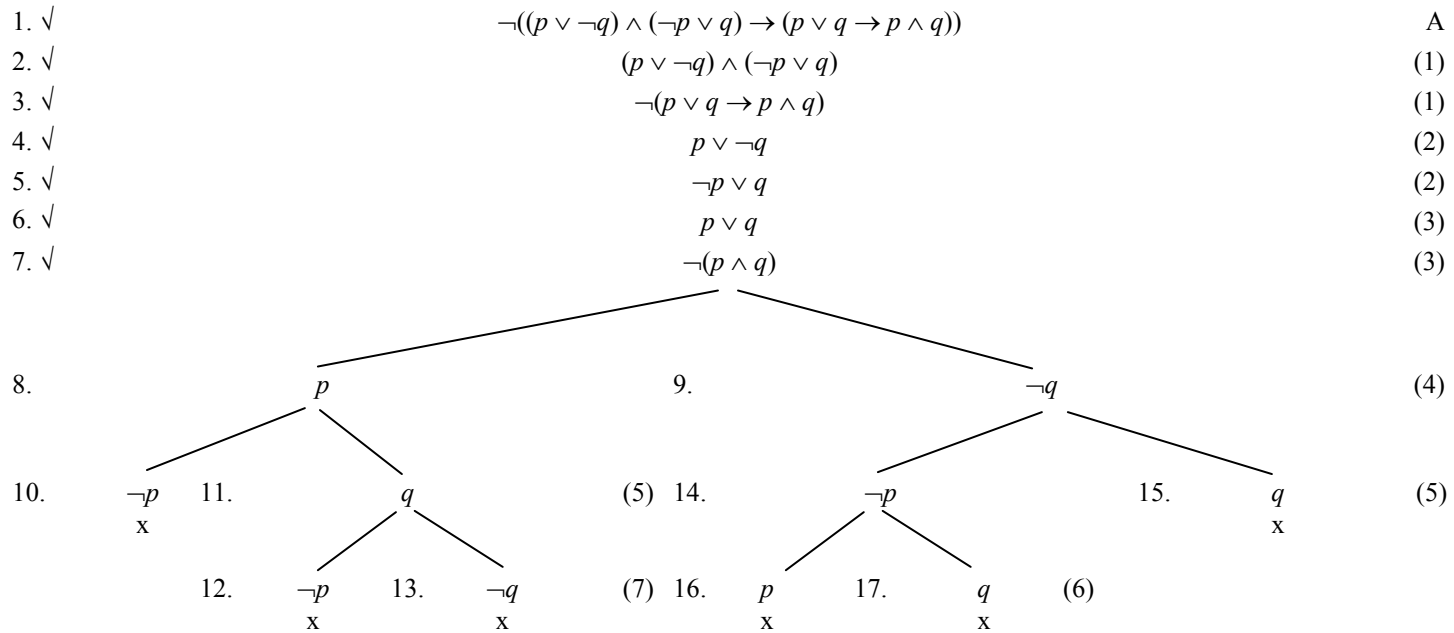
- $V(p) = 7$ ist eine Primzahl;
- $V(q) = 10$ ist eine Primzahl;
- $V(r) = 20$ ist eine Primzahl.

6. Zum Beispiel der Satz ' $(p \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg p)$ '.

4. Wahrheitstafel für den Satz $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \rightarrow (p \vee q \rightarrow p \wedge q)$:

p	q	$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \rightarrow (p \vee q \rightarrow p \wedge q)$								
W	W	W	F	W	F	W	W	W	W	W
W	F	W	W	F	F	F	W	F	F	F
F	W	F	F	F	W	W	W	F	F	F
F	F	W	W	W	W	W	F	W	F	F

Wahrheitsbaum für den Satz $((p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \wedge q))$:



Lösungen zu Kapitel 14

1. Beweise für die Sätze T11a, T12a, T13a, T16a, T17a, T20a, T21a, T22a, T23a und T24a:

$$\text{T11a } \vdash_{\text{AK}} A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$$

Die Folge

- | | | |
|----|-------------------|-----------|
| 1. | A | Ann. |
| 2. | $A \rightarrow B$ | Ann. |
| 3. | B | MP (1, 2) |

ist eine Ableitung von B aus A und $A \rightarrow B$. Daher gilt:

$$(i) \quad A, A \rightarrow B \vdash_{\text{AK}} B.$$

Hieraus ergibt sich durch zweimalige Anwendung des Deduktionstheorems:

$$(ii) \quad \vdash_{\text{AK}} A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B).$$

Mit Hilfe von (ii) beweisen wir jetzt T11a:

- | | | |
|----|--|-----------|
| 1. | A $\rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$ | (ii) |
| 2. | $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$ | T8' |
| 3. | $A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$ | T2 (1, 2) |

$$\text{T12a } \vdash_{\text{AK}} (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$$

- | | | |
|----|---|--------|
| 1. | A $\rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A))$ | T11a |
| 2. | $\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A)$ | T4 (1) |
| 3. | $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ | T6 (2) |

$$\text{T13a } \neg A \rightarrow B, \neg A \rightarrow \neg B \vdash_{\text{AK}} A$$

- | | | |
|----|-----------------------------|------------|
| 1. | A $\rightarrow B$ | Ann. |
| 2. | $\neg A \rightarrow \neg B$ | Ann. |
| 3. | $\neg\neg A$ | T13 (1, 2) |
| 4. | $\neg\neg A \rightarrow A$ | T7a |
| 5. | A | MP (3, 4) |

$$\text{T16a } \vdash_{\text{AK}} (A \wedge B) \wedge C \rightarrow A \wedge (B \wedge C),$$

Aufgrund von

- | | | |
|-----|--|-------------|
| 1. | A $\wedge B$ | Ann. |
| 2. | $(A \wedge B) \wedge C \rightarrow C$ | T10 |
| 3. | $(A \wedge B) \wedge C \rightarrow A \wedge B$ | T9 |
| 4. | A $\wedge B$ | MP (1, 3) |
| 5. | $A \wedge B \rightarrow A$ | T9 |
| 6. | $A \wedge B \rightarrow B$ | T10 |
| 7. | A | MP (4, 5) |
| 8. | B | MP (4, 6) |
| 9. | C | MP (1, 2) |
| 10. | $B \rightarrow (C \rightarrow B \wedge C)$ | T11 |
| 11. | $C \rightarrow B \wedge C$ | MP (8, 10) |
| 12. | $B \wedge C$ | MP (9, 11) |
| 13. | $A \rightarrow (B \wedge C \rightarrow A \wedge (B \wedge C))$ | T11 |
| 14. | $B \wedge C \rightarrow A \wedge (B \wedge C)$ | MP (7, 13) |
| 15. | $A \wedge (B \wedge C)$ | MP (12, 14) |

gilt:

$$(i) \quad (A \wedge B) \wedge C \vdash_{\text{AK}} A \wedge (B \wedge C).$$

Hieraus folgt aufgrund des Deduktionstheorems:

$$(ii) \quad \vdash_{\text{AK}} (A \wedge B) \wedge C \rightarrow A \wedge (B \wedge C).$$

$$\text{T17a } \vdash_{\text{AK}} \neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow A \wedge B,$$

$$\text{d.h. } \vdash_{\text{AK}} \neg(\neg\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$$

Aufgrund von

- | | | |
|----|---------------------------------|-----------|
| 1. | A $\rightarrow \neg B$ | Ann. |
| 2. | $\neg\neg A \rightarrow A$ | T7a |
| 3. | $\neg\neg A \rightarrow \neg B$ | T2 (2, 1) |

gilt:

$$(i) \quad A \rightarrow \neg B \vdash_{\text{AK}} \neg\neg A \rightarrow \neg B.$$

Hieraus folgt aufgrund des Deduktionstheorems:

$$(ii) \quad \vdash_{\text{AK}} (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg B).$$

Mit Hilfe von (ii) beweisen wir T17a:

1. $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg B)$ (ii)
2. $\neg(\neg\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$ T8 (1)

T20a $\vdash_{\text{AK}} (A \vee B) \vee C \rightarrow A \vee (B \vee C)$,

d.h. $\vdash_{\text{AK}} (\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow C))$

Aufgrund von

1. $\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow C$ Ann.
2. $\neg C \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ T8b (1)
3. $\neg A \rightarrow (\neg C \rightarrow B)$ T3 (2)
4. $(\neg C \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow C)$ T8b'
5. $\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow C)$ T2 (3, 4)

gilt:

(i) $\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow C \vdash_{\text{AK}} \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow C)$.

Und hieraus folgt aufgrund des Deduktionstheorems:

(ii) $\vdash_{\text{AK}} (\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow C))$.

T21a $\vdash_{\text{AK}} \neg(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow A \vee B$,

d.h. $\vdash_{\text{AK}} \neg\neg(\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$

Aufgrund von

1. $\neg\neg(\neg A \rightarrow \neg\neg B)$ Ann.
2. $\neg\neg(\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg B)$ T7a
3. $\neg A \rightarrow \neg\neg B$ MP (1, 2)
4. $\neg\neg B \rightarrow B$ T7a
5. $\neg A \rightarrow B$ T2 (3, 4)

gilt:

(i) $\neg\neg(\neg A \rightarrow \neg\neg B) \vdash_{\text{AK}} \neg A \rightarrow B$.

Hieraus folgt aufgrund des Deduktionstheorems:

(ii) $\vdash_{\text{AK}} \neg\neg(\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$.

T22a $\vdash_{\text{AK}} (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \rightarrow A \wedge (B \vee C)$,

d.h. $\vdash_{\text{AK}} (\neg\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg C)) \rightarrow$

$\neg(A \rightarrow \neg(\neg B \rightarrow C))$

Aufgrund von

1. $A \rightarrow \neg(\neg B \rightarrow C)$ Ann.
2. $\neg(\neg B \rightarrow C) \rightarrow \neg B$ T9a
3. $A \rightarrow \neg B$ T2 (1, 2)
4. $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg\neg(A \rightarrow \neg B)$ T7b
5. $\neg\neg(A \rightarrow \neg B)$ MP (3, 4)
6. $\neg(\neg B \rightarrow C) \rightarrow \neg C$ T10a
7. $A \rightarrow \neg C$ T2 (1, 6)
8. $\neg\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg C) \rightarrow \neg(\neg\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg C)))$ T11
9. $(A \rightarrow \neg C) \rightarrow \neg(\neg\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg C))$ MP (5, 8)
10. $\neg(\neg\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg C))$ MP (7, 9)

gilt:

(i) $A \rightarrow \neg(\neg B \rightarrow C) \vdash_{\text{AK}}$

$\neg(\neg\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg C))$.

Hieraus folgt aufgrund des Deduktionstheorems:

(ii) $\vdash_{\text{AK}} (A \rightarrow \neg(\neg B \rightarrow C)) \rightarrow$

$\neg(\neg\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg C))$.

Mit Hilfe von (ii) beweisen wir T22a:

1. $(A \rightarrow \neg(\neg B \rightarrow C)) \rightarrow \neg(\neg\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg C))$ (ii)
2. $(\neg\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg C)) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg(\neg B \rightarrow C))$ T8a (1)

T23a $\vdash_{\text{AK}} (A \vee B) \wedge (A \vee C) \rightarrow A \vee (B \wedge C)$,

d.h. $\vdash_{\text{AK}} \neg((\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow C)) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg C))$

Aufgrund von

1. $\neg((\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow C))$ Ann.
2. $\neg((\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow C)) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ T9
3. $\neg((\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow C)) \rightarrow (\neg A \rightarrow C)$ T10
4. $\neg A \rightarrow B$ MP (1, 2)
5. $\neg A \rightarrow C$ MP (1, 3)
6. $\neg A$ Ann.
7. B MP (6, 4)
8. C MP (6, 5)
9. $B \rightarrow (C \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg C))$ T11
10. $C \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg C)$ MP (7, 9)
11. $\neg(B \rightarrow \neg C)$ MP (8, 10)

gilt:

(i) $\neg((\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow C)), \neg A \vdash_{\text{AK}} \neg(B \rightarrow \neg C)$.

Und hieraus folgt durch zweimalige Anwendung des Deduktionstheorems:

(ii) $\vdash_{\text{AK}} \neg((\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow C)) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg C))$.

T24a $A \wedge B \rightarrow C \vdash_{\text{AK}} A \rightarrow (B \rightarrow C)$

d.h. $\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C \vdash_{\text{AK}} A \rightarrow (B \rightarrow C)$

Aufgrund von

1. $\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C$ Ann.
2. $\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$ T8b (1)
3. $A \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg B)$ T3 (2)
4. A Ann.
5. $\neg C \rightarrow \neg B$ MP (4, 3)
6. $B \rightarrow C$ T6 (5)

gilt:

(i) $\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C, A \vdash_{\text{AK}} B \rightarrow C$.

Und hieraus folgt durch aufgrund des Deduktionstheorems:

(ii) $\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C \vdash_{\text{AK}} A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

2. Beweis von A1:

1. A Ann.

ist eine Ableitung von A aus $\{A, B\}$. Daher gilt:

(i) $A, B \vdash_{\text{AK}} A$.

Und hieraus ergibt sich durch zweimalige Anwendung des Deduktionstheorems

(ii) $\vdash_{\text{AK}} A \rightarrow (B \rightarrow A)$.

Beweis von A2:

1. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ Ann.

2. $A \rightarrow B$ Ann.

3. A Ann.

4. $B \rightarrow C$ MP (1, 3)

5. B MP (2, 3)

6. C MP (4, 5)

ist eine Ableitung von C aus $\{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A\}$. Daher gilt:

(i) $A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash_{\text{AK}} C$.

Und hieraus ergibt sich durch dreimalige Anwendung des Deduktionstheorems

(ii) $\vdash_{\text{AK}} (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$.

3. Wie in Aufgabe 2 gezeigt, hängt das Deduktionstheorem nur von A1 und A2 sowie Modus Ponens ab. Es gilt also auch in AKF. Mit Hilfe des Deduktionsbeweises beweisen wir jetzt A3 in AKF:

1. $\neg B \rightarrow \neg A$ Ann.

2. A Ann.

3. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B)$ F4

4. $\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B$ MP (1, 3)

5. $A \rightarrow \neg\neg A$ F6

6. $\neg\neg B \rightarrow B$ F5

7. $\neg\neg A$ MP (2, 5)

8. $\neg\neg B$ MP (4, 7)

9. B MP (6, 8)

ist eine Ableitung von B aus $\{\neg B \rightarrow \neg A, A\}$. Daher gilt:

(i) $\neg B \rightarrow \neg A, A \vdash_{\text{AKF}} B$.

Und hieraus ergibt sich durch zweimalige Anwendung des Deduktionstheorems

$$(ii) \quad \vdash_{AKF} (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B).$$

4. Ein Beweis von F3 mit Hilfe des Deduktionstheorems, also mit F1 und F2 (vgl. Aufgabe 2):

1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Ann.
2.	B	Ann.
3.	A	Ann.
4.	$B \rightarrow C$	MP (1, 3)
5.	C	MP (2, 4)

ist eine Ableitung von C aus $\{A \rightarrow (B \rightarrow C), B, A\}$. Daher gilt:

$$(i) \quad A \rightarrow (B \rightarrow C), B, A \vdash_{AKF} C.$$

Und hieraus ergibt sich durch dreimalige Anwendung des Deduktionstheorems

$$(ii) \quad \vdash_{AKF} (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C)).$$

Lösungen zu Kapitel 15

1. a) Paul Celan ist der Sänger einer Heavy-Metal-Band.
- b) Afghanistan ist ein großes Land.
- c) Einen Urlaubstag zu bekommen ist möglich.
- d) Jeder bedeutende Philosoph war ein guter Logiker.
- e) Pilze sind Tiere oder sie betreiben Photosynthese.
2. a) p
 p : In Bielefeld regnet es immer.
- b) p
 p : Der Satz des Pythagoras ist unsinnig.
- c) $\neg p$
 p : Jemand weiß, wie es weiter geht.
- d) $p \wedge \neg q$
 p : Der Krieg begann im Winter;
 q : Der Krieg begann im Sommer.
- e) $\neg(p \leftrightarrow q)$
 p : Wien liegt an der Donau;
 q : Wien liegt an der Moldau.
- f) p
 p : Hitler und Stalin waren verbündet.

- g) $p \vee q$
 p : Der Gewinner erhält einen Apfel;
 q : Der Gewinner erhält eine Banane.
- h) $\neg p \rightarrow \neg q$
 p : Man drückt sich verständlich aus;
 q : Man wird verstanden.
- i) $p \wedge \neg q$
 p : Logik ist anstrengend;
 q : Logik ist in der modernen Philosophie verzichtbar.
- j) $\neg p \rightarrow q$
 p : Kaffee ist gesünder als Tee;
 q : Tee ist gesünder als Kaffee.
- k) $p \leftrightarrow \neg q$
 p : Gott ist tot;
 q : Nietzsche irrte sich.
- l) $p \leftrightarrow q$
 p : A ist eine adäquate Übersetzung von A' ;
 q : A und A' besitzen dieselben Wahrheitsbedingungen.
- m) $\neg(\neg p \wedge q) \wedge (\neg r \wedge s)$
 p : Die mathematischen Gesetze sind problematisch;
 q : Die mathematischen Gesetze sind gewiss;
 r : Die Gesetze der Logik sind problematisch;
 s : Die Gesetze der Logik sind gewiss.
- n) $(p \wedge q) \rightarrow \neg r \wedge \neg s$
 p : Die Maxwell'schen Gleichungen sind linear;
 q : Die Maxwell'schen Gleichungen sind homogen;
 r : Im betrachteten Raum befinden sich Ströme;
 s : Im betrachteten Raum befinden sich Ladungen.
- o) $p \wedge q$
 p : Der Weg ist der Weg;
 q : Der Weg ist das Ziel.
- p) p
 p : Jenseits der Kastanien ist alles, was man sagen kann, falsch.
3. a) Die Erde ist rund. Also: Wenn die Erde eine Scheibe ist, dann ist die Erde rund.
- b) Die Erde ist rund. Also: Wenn die Erde nicht rund ist, dann ist 7 kleiner als 5.

- c) Es nicht der Fall, dass ein Weltkrieg ausbricht, wenn alle Menschen gleichzeitig niesen. Also: Wenn ein Weltkrieg ausbricht, niesen alle Menschen gleichzeitig.
4. 'Es ist nicht der Fall, dass A und nicht B ' kann ohne große Schwierigkeiten in $\neg(A' \wedge \neg B')$ übersetzt werden. Angenommen nun, $A' \rightarrow B'$ ist wahr (bzgl. der bei der Übersetzung verwendeten Bewertung). Da $A' \rightarrow B' \models_{AL} \neg(A' \wedge \neg B')$, muss in diesem Fall auch $\neg(A' \wedge \neg B')$ wahr sein. Weil letzteres eine adäquate Übersetzung von 'Es ist nicht der Fall, dass A und nicht B ' ist, muss also auch dieser Satz wahr sein. Wenn nun die angegebene Argumentform gültig ist, und die Prämisse wahr, dann muss auch die Konklusion wahr sein. Das heißt: Wenn $A' \rightarrow B'$ wahr ist, dann muss auch 'Wenn A , dann B ' wahr sein.

Lösungen zu Kapitel 16

1. (a), (b), (d) und (e) sind wahr, (c) und (f) falsch.
 2. (a) Übersetzung:

- (a.1') $p \wedge q \rightarrow \neg r$
 (a.2') r
 (a.3') $\neg p \wedge \neg q$
 p : Gott ist gütig;
 q : Gott ist allmächtig;
 r : Es gibt Leiden in der Welt.

Wie die folgende Wahrheitstafel zeigt, ist das Argument (a) nicht aussagenlogisch gültig:

p	q	r	$p \wedge q$	\rightarrow	$\neg r$	r	$\neg p$	\wedge	$\neg q$
W	W	W	W	F	F	W	F	F	
W	W	F	W	W	W	F	F	F	
W	F	W	F	W	W	W	F	F	
W	F	F	F	W	W	F	F	F	
F	W	W	F	W	W	W	W	F	F
F	W	F	F	W	W	F	W	F	F
F	F	W	F	W	W	W	W	W	W
F	F	F	F	W	W	F	W	W	W

(b) Übersetzung:

- (b.1') $p \vee q$
 (b.2') $p \rightarrow r$
 (b.3') $q \rightarrow r$
 (b.4') r

- p : Gott hat den gesamten Lauf der Welt bereits mit der Schöpfung festgelegt;
 q : Gott greift ständig in das Weltgeschehen ein;
 r : Gott ist an allem schuld.

Wie die folgende Wahrheitstafel zeigt, ist das Argument (a) aussagenlogisch gültig:

p	q	r	$p \wedge q$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	r
W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	F	F	F
W	F	W	F	W	W	W
W	F	F	F	F	W	F
F	W	W	F	W	W	W
F	W	F	F	W	F	F
F	F	W	F	W	W	W
F	F	F	F	W	W	F

(c) Übersetzung:

- (c.1') $\neg p \wedge q \rightarrow r$
 (c.2') $\neg r$
 (c.3') q
 (c.4') p

- p : Gott existiert wirklich;
 q : Gott existiert im Verstand;
 r : Es kann etwas Größeres als Gott gedacht werden.

Wie die folgende Wahrheitstafel zeigt, ist das Argument (c) aussagenlogisch gültig:

p	q	r	$\neg p \wedge q$	\rightarrow	r	$\neg r$	q	p
W	W	W	F	W	F	W	W	
W	W	F	F	W	W	W	W	
W	F	W	F	W	F	F	W	
W	F	F	F	W	W	F	W	
F	W	W	W	W	F	W	F	
F	W	F	W	F	W	W	F	
F	F	W	F	W	F	F	F	
F	F	F	F	W	W	F	F	

3. (a) siehe nächste Seite.

(b) Übersetzung:

(b.1') $\neg(p \leftrightarrow \neg p)$

(b.2') $\neg p \rightarrow q$

(b.3') $r \rightarrow \neg q \wedge \neg p$

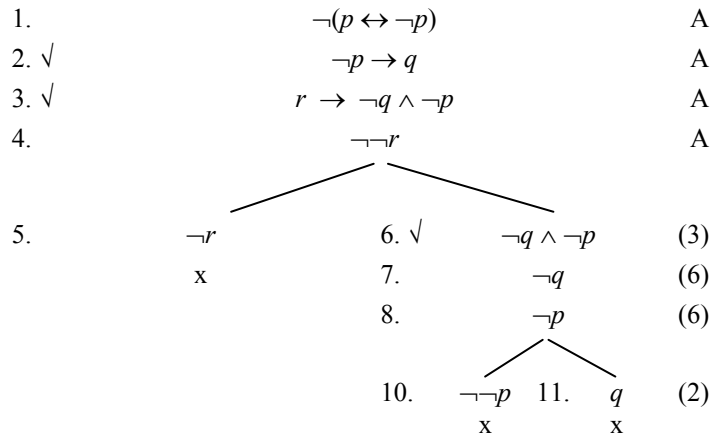
(b.4') $\neg r$

p : Menschliches Handeln ist determiniert;

q : Menschliches Handeln ist zufällig;

r : Menschliches Handeln ist frei.

Wie der folgende Wahrheitsbaum zeigt, ist das Argument (b) aussagenlogisch gültig:



(a) Übersetzung:

(a.1') p

(a.2') q

p : Ich denke;

q : Ich existiere.

Wie der folgende Wahrheitsbaum zeigt, ist das Argument (a) nicht aussagenlogisch gültig:

- | | | |
|----|-----|---|
| 1. | p | A |
| 2. | q | A |

(c) Übersetzung:

(c.1') $p \rightarrow q$

(c.2') $q \rightarrow \neg r$

(c.3') $\neg r \rightarrow \neg s$

(c.4') $\neg p$

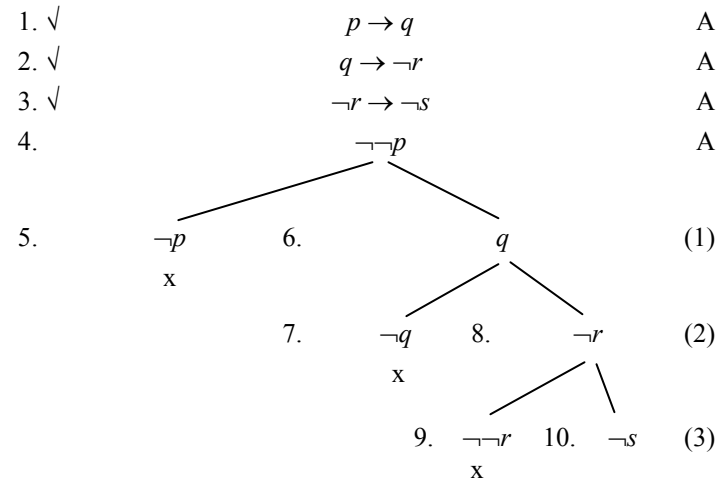
p : Materialisten haben Recht;

q : Es existieren nur materielle Gegenstände;

r : Es gibt Überzeugungen;

s : Materialisten haben Überzeugungen.

Wie der folgende Wahrheitsbaum zeigt, ist das Argument (c) nicht aussagenlogisch gültig:



(d) Übersetzung:

(d.1') $p \vee q$

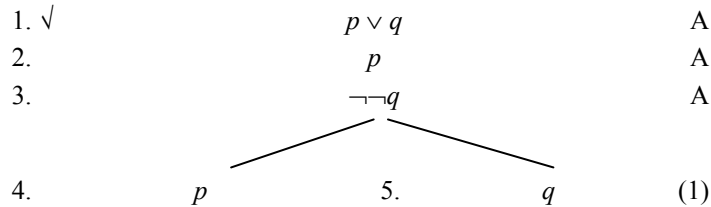
(d.2') p

(d.3') $\neg q$

p : Frege wurde in Wismar geboren;

q : Frege wurde in Weimar geboren.

Wie der folgende Wahrheitsbaum zeigt, ist das Argument (d) nicht aussagenlogisch gültig:



(e) Übersetzung:

(e.1') $\neg(p \leftrightarrow q)$

(e.2') $r \leftrightarrow \neg p$

(e.3') $p \rightarrow \neg s$

(e.4') $s \rightarrow q$

(e.5') $r \rightarrow t \wedge \neg q$

(e.6') p

p : Der Graf ist der Mörder;

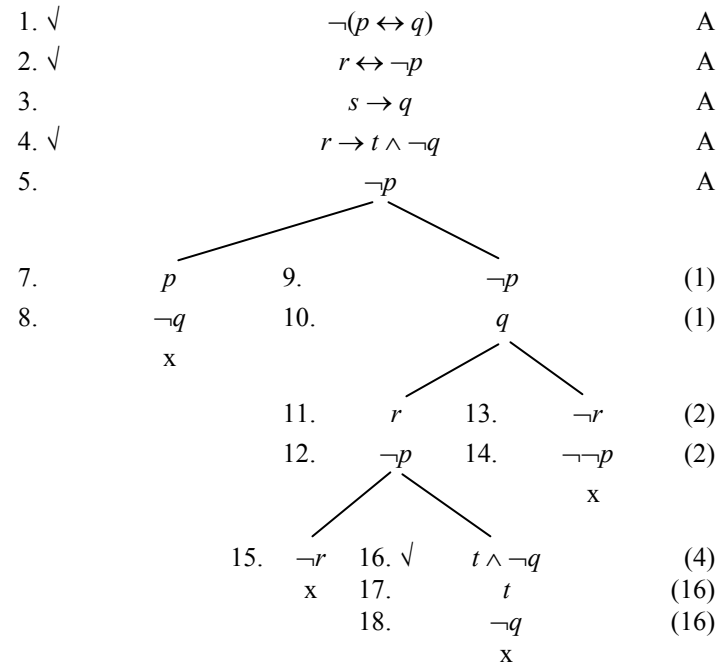
q : Die Köchin ist der Mörder;

r : Das Graf war im Garten;

s : Die Mordwaffe ist ein Messer;

t : Die Köchin war im Garten.

Wie der Wahrheitsbaum auf der nächsten Seite zeigt, ist das Argument (e) aussagenlogisch gültig:



4. Wenn A ein Lügner wäre, wäre der von ihm geäußerte Satz „Wenn ich ein Wahrsager bin, dann ist B ein Lügner“ falsch, also wäre in diesem Fall der Satz „Ich bin ein Wahrsager, und B ist kein Lügner“ wahr. Dieser Satz kann aber nur wahr sein, wenn A ein Wahrsager ist. Aus der Annahme, dass A ein Lügner ist, folgt also ein Widerspruch. D.h., A kann kein Lügner sein; er muss ein Wahrsager sein. Deshalb ist, was er sagt, wahr. Also ist B ein Lügner. Wenn B sagt „Ich bin genau dann ein Wahrsager, wenn C einer ist“, ist das also falsch. Wahr ist deshalb der Satz „Wenn B ein Wahrsager ist, ist C ein Lügner, und wenn B ein Lügner ist, ist C ein Wahrsager“. Also ist auch C ein Wahrsager.
5. Angenommen, jemand tut etwas, was sich adäquat mit ‘ $\neg(p \vee \neg p)$ ’ übersetzen lässt. Wir übersetzen ferner ‘die Welt geht unter’ mit ‘ q ’.

Wie der folgende Wahrheitsbaum zeigt, gilt: $\neg(p \vee \neg p) \models_{AL} q$.

1. $\sqrt{\quad}$	$\neg(p \vee \neg p)$	A
2.	$\neg q$	A
3.	$\neg p$	(1)
4.	$\neg\neg p$	(1)
	x	

Wenn Sie das beunruhigt, beweisen Sie, dass aus der angegebenen Prämisse auch folgt, dass die Welt *nicht* untergeht!

Lösungen zu Kapitel 17

Abschnitt 17.1

- (a), (f), (h), (k) und (p) sind Sätze von PL, Satzfunktionen sind (a), (f), (g), (h), (j), (k), (n), (p) und (q).
- (a) ist ein atomarer Satz, (f) eine Subjunktion, (h) ein Allsatz, (k) eine Adjunktion und (p) ein Existenzsatz.
- Die freien Variablen sind unterstrichen:
 - $G^1 \underline{x} \vee \forall x G^1 x$
 - $\exists z (F^2 a z \wedge H^1 \underline{x}) \leftrightarrow H^1 \underline{y}$
 - $H^3 a a a \vee \neg\neg\neg \forall x H^3 \underline{xxx} \rightarrow H^3 \underline{xxx}$
 - $\forall y (\forall y (\forall y F^1 y \wedge F^1 y) \wedge F^1 y) \wedge \overline{F^1 y}$

In den Sätzen (a), (f), (h), (k) und (p) gibt es naturgemäß keine freien Variablen.
- Nein. In einem Satz von PL kann keine Variable frei vorkommen. In einer Satzfunktion dagegen wäre das möglich.
- $H^3 b b y$
 - $F^1 a \wedge H^1 a$
 - $F^1 a \leftrightarrow F^1 a \vee G^2 x a$
 - $\neg \exists x (G^1 x \vee H^2 a b) \vee F^1 a$
 - $\forall y F^3 y x a$
 - $\forall y F^3 y y a$
 - $F^2 b b$
 - $\forall y F^2 y b$

Abschnitt 17.2

- ist wahr bzgl. I_1 ; denn 5 ist größer als 2.
 - ist wahr bzgl. I_1 ; denn 1 ist keine gerade natürliche Zahl, also ist das Vorderglied der Subjunktion falsch.
 - ist falsch bzgl. I_1 ; denn nicht alle geraden natürlichen Zahlen sind ungerade.
 - ist wahr bzgl. I_1 ; denn es gibt Primzahlen, die kleiner sind als 4.
 - ist falsch bzgl. I_1 ; denn es gibt eine natürliche Zahl kleiner 1, nämlich 0.
 - ist wahr bzgl. I_1 ; denn es gibt eine Zahl x , nämlich 0, so dass für alle y gilt: $y = y + x$.
 - ist falsch bzgl. I_1 ; denn x kann nicht nur kleiner oder größer als y sein, sondern auch gleich groß, wenn nämlich $x = y$.
 - ist falsch bzgl. I_1 ; denn es gibt keine Primzahl, die größer ist als alle Zahlen.
 - ist wahr bzgl. I_1 ; denn wenn x durch y teilbar ist, ist $x \geq y$; und in diesem Fall gibt es eine Zahl z mit $y + z = x$.
- $G^2 e c \wedge G^2 c a$
 - $\exists x H^1 x$
 - $\forall x G^2 x c$
 - $\forall x (G^2 x c \vee F^2 x d)$
 - $\forall x (H^1 x \rightarrow \exists y (H^1 y \wedge G^2 y x))$
- Zum Beispiel:

D = die Menge aller Elefanten;
 F^1 : ... ist ein Fisch;
 G^1 : ... ist ein Säugetier.
- Hier die jeweils einfachste Lösung:

Es gibt höchstens zwei Gegenstände: $\exists x \exists y \forall z ((z = x) \vee (z = y))$.
 Es gibt genau zwei Gegenstände: $\exists x \exists y \forall z ((z = x) \leftrightarrow \neg(z = y))$.
 Es gibt mindestens drei Gegenstände:
 $\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z))$.

Lösungen zu Kapitel 18

- (a), (c), (d) und (e) sind wahr, (b) und (f) falsch.
- I ist ein Gegenbeispiel gegen (a) und (d).

3. Zum Beispiel:

- a) D = die Menge aller Fahrräder;
 F^1 : ... ist ein Krokodil.
- b) D = die Menge aller Philosophen;
 a : Plato;
 b : Sokrates;
 F^2 : ... ist der Schüler von ---.
- c) D = die Menge aller Schauspieler;
 F^2 : ... ist bekannter als ---.
- d) D = die Menge aller Staaten;
 a : Schweiz;
 F^2 : ... befindet sich im Krieg mit ---.

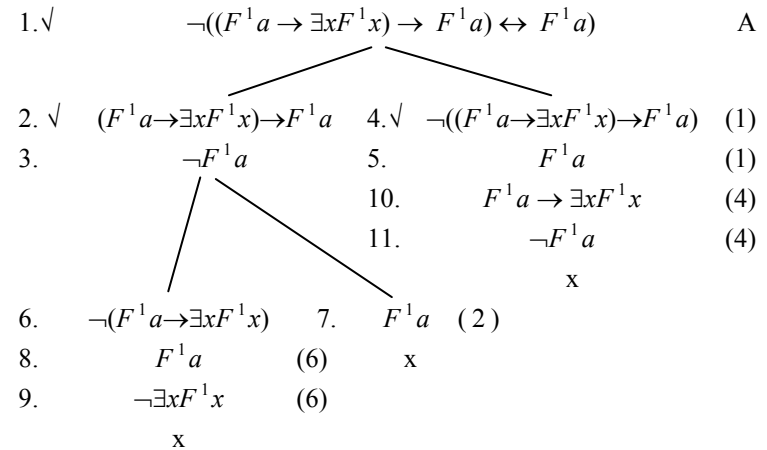
4. Zum Beispiel:

- a) D = die Menge aller Beeren;
 F^1 : ... ist eine Himbeere.
- b) D = die Menge aller Vögel;
 F^1 : ... ist ein Kolibri;
 G^1 : ... ist ein Orang-Utan.
- c) D = die Menge aller Menschen;
 a : Kurt Gödel;
 F^2 : ... ist verheiratet mit ---.
- d) D = die Menge aller Städte;
 F^2 : ... hat mindestens doppelt so viele Einwohner wie ---.

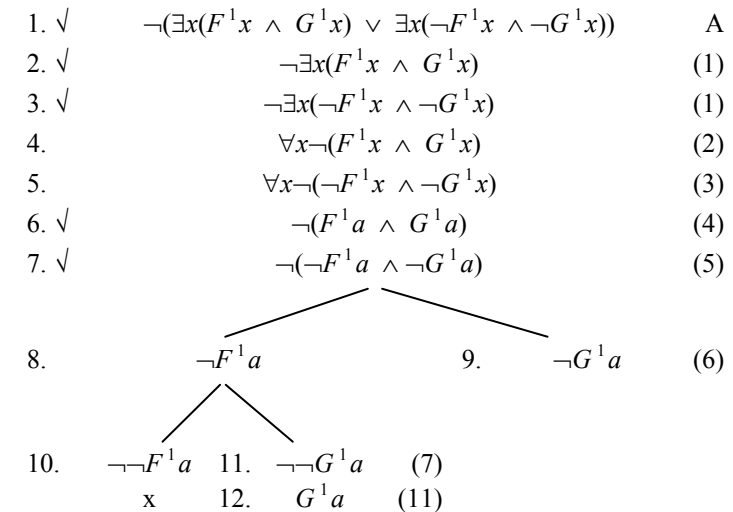
Lösungen zu Kapitel 19

1. (a) $\neg((F^1 a \rightarrow \exists x F^1 x) \rightarrow F^1 a) \leftrightarrow F^1 a$ ist logisch wahr. Wahrheitsbaum siehe nächste Seite.
- (b) $\exists x(F^1 x \wedge G^1 x) \vee \exists x(\neg F^1 x \wedge \neg G^1 x)$ ist nicht logisch wahr. Wahrheitsbaum siehe nächste Seite.
- (c) $\exists x \forall y (F^1 y \rightarrow (G^1 x \rightarrow F^1 y))$ ist logisch wahr. Wahrheitsbaum siehe übernächste Seite.
- (d) $\forall x(F^1 x \vee G^1 x) \rightarrow \forall x F^1 x \vee \forall x G^1 x$ ist nicht logisch wahr. Wahrheitsbaum siehe nächste Seite.
- (e) $\exists x(F^1 x \vee G^1 x) \rightarrow \exists x F^1 x \vee \exists x G^1 x$ ist logisch wahr. Wahrheitsbaum siehe übernächste Seite.

Wahrheitsbaum für (a):



Wahrheitsbaum für (b):



Wahrheitsbaum für (c):

- | | | |
|------|--|-----|
| 1. √ | $\neg\exists x\forall y(F^1y \rightarrow (G^1x \rightarrow F^1y))$ | A |
| 2. | $\forall x\neg\forall y(F^1y \rightarrow (G^1x \rightarrow F^1y))$ | (1) |
| 3. √ | $\neg\forall y(F^1y \rightarrow (G^1a \rightarrow F^1y))$ | (2) |
| 4. √ | $\exists y\neg(F^1y \rightarrow (G^1a \rightarrow F^1y))$ | (3) |
| 5. √ | $\neg(F^1b \rightarrow (G^1a \rightarrow F^1b))$ | (4) |
| 6. | F^1b | (5) |
| 7. √ | $\neg(G^1a \rightarrow F^1b)$ | (5) |
| 8. | G^1a | (7) |
| 9. | $\neg F^1b$ | (7) |
| | x | |

Wahrheitsbaum für (d):

- | | | |
|-------|--|------|
| 1. √ | $\neg(\forall x(F^1x \vee G^1x) \rightarrow \forall xF^1x \vee \forall xG^1x)$ | A |
| 2. | $\forall x(F^1x \vee G^1x)$ | (1) |
| 3. √ | $\neg(\forall xF^1x \vee \forall xG^1x)$ | (1) |
| 4. √ | $\neg\forall xF^1x$ | (3) |
| 5. √ | $\neg\forall xG^1x$ | (3) |
| 6. √ | $\exists x\neg F^1x$ | (4) |
| 7. √ | $\exists x\neg G^1x$ | (5) |
| 8. | $\neg F^1a$ | (6) |
| 9. | $\neg G^1b$ | (7) |
| 10. √ | $F^1a \vee G^1a$ | (2) |
| | $\swarrow \quad \searrow$ | |
| 11. | F^1a 12. G^1a | (10) |
| | x x | |
| | $\swarrow \quad \searrow$ | |
| | 13. √ $F^1b \vee G^1b$ | (2) |
| | $\swarrow \quad \searrow$ | |
| | 14. F^1b 15. G^1b | (12) |
| | x | |

Wahrheitsbaum für (e):

- | | | |
|------|--|-----|
| 1. √ | $\neg(\exists x(F^1x \vee G^1x) \rightarrow \exists xF^1x \vee \exists xG^1x)$ | A |
| 2. √ | $\exists x(F^1x \vee G^1x)$ | (1) |
| 3. √ | $\neg(\exists xF^1x \vee \exists xG^1x)$ | (1) |
| 4. √ | $\neg\exists xF^1x$ | (3) |
| 5. √ | $\neg\exists xG^1x$ | (3) |
| 6. | $\forall x\neg F^1x$ | (4) |
| 7. | $\forall x\neg G^1x$ | (5) |
| 8. √ | $F^1a \vee G^1a$ | (2) |
| 9. | $\neg F^1a$ | (6) |
| 10. | $\neg G^1a$ | (7) |
| | $\swarrow \quad \searrow$ | |
| 11. | F^1a 12. G^1a | (8) |
| | x x | |

2. (a) Die Aussage ' $\models_{PL} F^1a \leftrightarrow \exists xF^1x$ ' ist falsch.

Gegenbeispiel:

D = die Menge der natürlichen Zahlen;

a : 2;

F^1 : ... ist eine ungerade natürliche Zahl.

(b) Die Aussage ' $F^1a \vee F^1b \models_{PL} (F^1a \rightarrow F^1b) \rightarrow F^1b$ ' ist wahr.

(c) Die Aussage ' $\forall x(F^1x \rightarrow G^1x), F^1a \models_{PL} G^1a$ ' ist wahr.

(d) Die Aussage ' $\forall x(F^1x \rightarrow F^1a) \models_{PL} \forall xF^1x \rightarrow F^1a$ ' ist wahr.

(e) Die Aussage ' $\forall x(F^1a \rightarrow F^1x) \models_{PL} F^1a \rightarrow \forall xF^1x$ ' ist wahr.

Wahrheitsbäume für (b)–(e) auf den nächsten beiden Seiten:

(f) Die Aussage ' $\exists x\forall yF^3xya \models_{PL} \neg\forall x\exists y\neg F^3axy$ ' ist falsch.

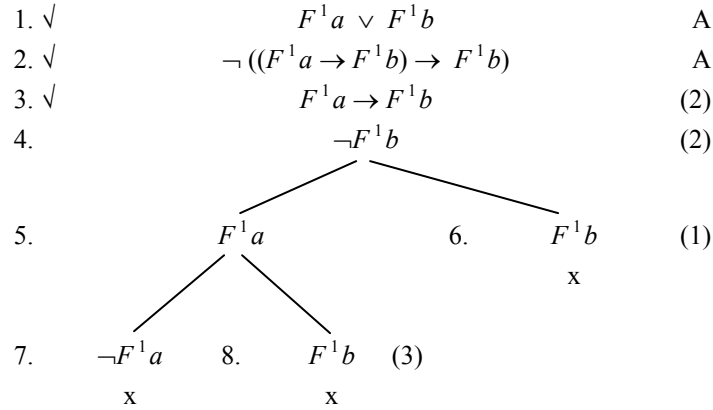
Gegenbeispiel:

D = die Menge der natürlichen Zahlen;

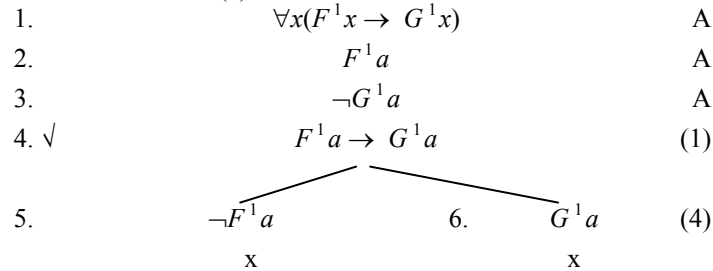
a : 0;

F^3 : Das Produkt von ... und --- ist ***.

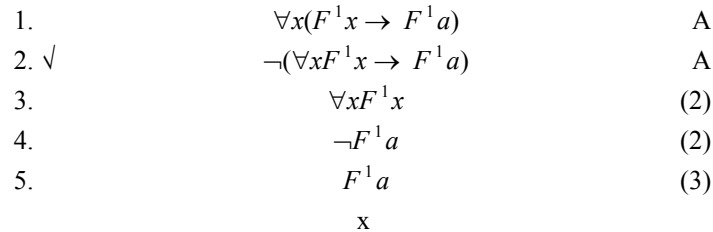
Wahrheitsbaum für (b):



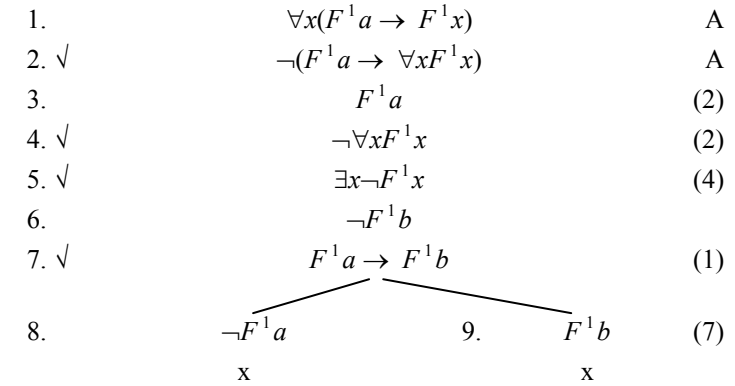
Wahrheitsbaum für (c):



Wahrheitsbaum für (d):



Wahrheitsbaum für (e):



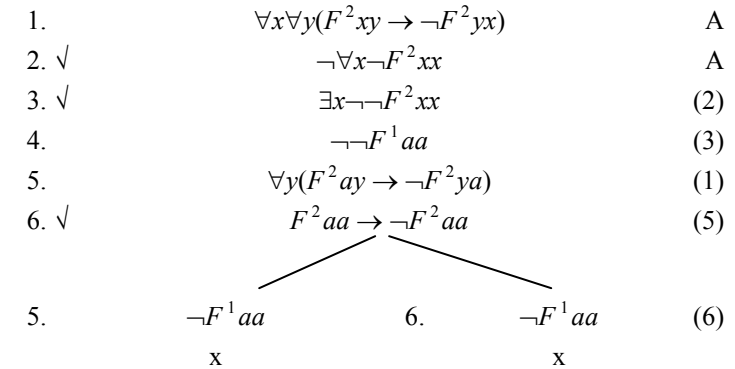
(g) Die Aussage $\neg\exists x(F^1x \wedge G^1x) \wedge \exists x(G^1x \wedge H^1x) \models_{\text{PL}} \exists x(F^1x \wedge H^1x)$ ist falsch.

Gegenbeispiel:

- D = die Menge aller Tiere;
- F^1 : ... ist ein Hund;
- G^1 : ... ist ein Säugetier;
- H^1 : ... ist eine Katze.

(h) Die Aussage $\forall x\forall y(F^2xy \rightarrow \neg F^2yx) \models_{\text{PL}} \forall x\neg F^2xx$ ist wahr.

Wahrheitsbaum :



- (i) Die Aussage $\forall x \forall y \forall z (F^2 xy \wedge F^2 yz \rightarrow F^2 xz)$, $\forall x \neg F^2 xx$
 $\models_{\text{PL}} \neg \forall x \exists y F^2 xy$ ist falsch.

Gegenbeispiel:

D = die Menge der ganzen Zahlen;
 F^2 : ... ist größer ---.

- (j) Die Aussage $\models_{\text{PL}} \forall x (\exists y F^2 xy \rightarrow \exists y F^2 yx)$ ist falsch.

Gegenbeispiel:

D = die Menge der natürlichen Zahlen;
 F^2 : ... ist kleiner als ---.

Lösungen zu Kapitel 20

1. Im Folgenden sei τ eine Individuenkonstante, die in A , B , C und E nicht vorkommt.

$$\text{T*11} \quad \forall \alpha (A \rightarrow B), \forall \alpha (B \rightarrow C) \vdash_{\text{PK}} \forall \alpha (A \rightarrow C)$$

1. $\forall \alpha (A \rightarrow B)$ Ann.
2. $\forall \alpha (B \rightarrow C)$ Ann.
3. $\forall \alpha (A \rightarrow B) \rightarrow ([A]_{\alpha}^{\tau} \rightarrow [B]_{\alpha}^{\tau})$ A4
4. $\forall \alpha (B \rightarrow C) \rightarrow ([B]_{\alpha}^{\tau} \rightarrow [C]_{\alpha}^{\tau})$ A4
5. $[A]_{\alpha}^{\tau} \rightarrow [B]_{\alpha}^{\tau}$ MP (1, 3)
6. $[B]_{\alpha}^{\tau} \rightarrow [C]_{\alpha}^{\tau}$ MP (2, 4)
7. $[A]_{\alpha}^{\tau} \rightarrow [C]_{\alpha}^{\tau}$ AF (5, 6)
8. $([A]_{\alpha}^{\tau} \rightarrow [C]_{\alpha}^{\tau}) \rightarrow ((C \rightarrow C) \rightarrow ([A]_{\alpha}^{\tau} \rightarrow [C]_{\alpha}^{\tau}))$ A1
9. $(C \rightarrow C) \rightarrow ([A]_{\alpha}^{\tau} \rightarrow [C]_{\alpha}^{\tau})$ MP (7, 8)
10. $(C \rightarrow C) \rightarrow \forall \alpha (A \rightarrow C)$ HG (9)
11. $C \rightarrow C$ TT
12. $\forall \alpha (A \rightarrow C)$ MP (10, 11)

$$\text{T*12b} \quad \vdash_{\text{PK}} \forall \alpha A \wedge \forall \alpha B \vdash_{\text{PK}} \forall \alpha (A \wedge B),$$

1. $\forall \alpha A \wedge \forall \alpha B$ Ann.
2. $\forall \alpha A \rightarrow [A]_{\alpha}^{\tau}$ A4
3. $\forall \alpha B \rightarrow [B]_{\alpha}^{\tau}$ A4
4. $\forall \alpha A \wedge \forall \alpha B \rightarrow [A]_{\alpha}^{\tau} \wedge [B]_{\alpha}^{\tau}$ AF (2, 3)

$$5. \quad \forall \alpha A \wedge \forall \alpha B \rightarrow \forall \alpha (A \wedge B) \quad \text{HG (4)}$$

$$6. \quad \forall \alpha (A \wedge B) \quad \text{MP (1, 5)}$$

$$\text{T*13b} \quad \vdash_{\text{PK}} \exists \alpha A \vee \exists \alpha B \rightarrow \exists \alpha (A \vee B),$$

$$\text{d.h.} \vdash_{\text{PK}} \neg \forall \alpha \neg A \vee \neg \forall \alpha \neg B \rightarrow \neg \forall \alpha \neg (A \vee B)$$

$$1. \quad \forall \alpha \neg (A \vee B) \rightarrow \neg ([A]_{\alpha}^{\tau} \vee [B]_{\alpha}^{\tau}) \quad \text{A4}$$

$$2. \quad \forall \alpha \neg (A \vee B) \rightarrow \neg [A]_{\alpha}^{\tau} \quad \text{AF (1)}$$

$$3. \quad \forall \alpha \neg (A \vee B) \rightarrow \forall \alpha \neg A \quad \text{HG (2)}$$

$$4. \quad \forall \alpha \neg (A \vee B) \rightarrow \neg [B]_{\alpha}^{\tau} \quad \text{AF (1)}$$

$$5. \quad \forall \alpha \neg (A \vee B) \rightarrow \forall \alpha \neg B \quad \text{HG (4)}$$

$$6. \quad \forall \alpha \neg (A \vee B) \rightarrow \forall \alpha \neg A \wedge \forall \alpha \neg B \quad \text{AF (3, 5)}$$

$$7. \quad \forall \alpha \neg (A \vee B) \rightarrow \neg (\neg \forall \alpha \neg A \vee \neg \forall \alpha \neg B) \quad \text{AF (6)}$$

$$8. \quad \neg \forall \alpha \neg A \vee \neg \forall \alpha \neg B \rightarrow \neg \forall \alpha \neg (A \vee B) \quad \text{AF (7)}$$

$$\text{T*15} \quad \vdash_{\text{PK}} \forall \alpha A \vee \forall \alpha B \rightarrow \forall \alpha (A \vee B)$$

$$1. \quad \forall \alpha A \rightarrow [A]_{\alpha}^{\tau} \quad \text{A4}$$

$$2. \quad \forall \alpha B \rightarrow [B]_{\alpha}^{\tau} \quad \text{A4}$$

$$3. \quad \forall \alpha A \vee \forall \alpha B \rightarrow [A]_{\alpha}^{\tau} \vee [B]_{\alpha}^{\tau} \quad \text{AF (1, 2)}$$

$$4. \quad \forall \alpha A \vee \forall \alpha B \rightarrow \forall \alpha (A \vee B) \quad \text{HG (3)}$$

$$\text{T*16b} \quad \vdash_{\text{PK}} \exists \alpha A \rightarrow E \vdash_{\text{PK}} \forall \alpha (A \rightarrow E),$$

$$\text{d.h.} \neg \forall \alpha \neg A \rightarrow E \vdash_{\text{PK}} \forall \alpha (A \rightarrow E)$$

$$1. \quad \neg \forall \alpha \neg A \rightarrow E \quad \text{Ann.}$$

$$2. \quad \forall \alpha \neg A \rightarrow \neg [A]_{\alpha}^{\tau} \quad \text{A4}$$

$$3. \quad \forall \alpha \neg A \rightarrow ([A]_{\alpha}^{\tau} \rightarrow E) \quad \text{AF (2)}$$

$$4. \quad \forall \alpha \neg A \rightarrow \forall \alpha (A \rightarrow E) \quad \text{HG (3)}$$

$$5. \quad E \rightarrow ([A]_{\alpha}^{\tau} \rightarrow E) \quad \text{TT}$$

$$6. \quad E \rightarrow \forall \alpha (A \rightarrow E) \quad \text{HG (5)}$$

$$7. \quad (\neg \forall \alpha \neg A \rightarrow E) \rightarrow \forall \alpha (A \rightarrow E) \quad \text{AF (4, 6)}$$

$$8. \quad \forall \alpha (A \rightarrow E) \quad \text{MP (1, 7)}$$

- T*17b $\vdash_{PK} (\forall\alpha A \rightarrow E) \rightarrow \exists\alpha(A \rightarrow E)$,
 d.h. $\vdash_{PK} (\forall\alpha A \rightarrow E) \rightarrow \neg\forall\alpha\neg(A \rightarrow E)$
1. $\forall\alpha\neg(A \rightarrow E) \rightarrow \neg([A]_{\alpha}^{\tau} \rightarrow [E]_{\alpha}^{\tau})$ A4
 2. $\forall\alpha\neg(A \rightarrow E) \rightarrow [A]_{\alpha}^{\tau}$ AF (1)
 3. $\forall\alpha\neg(A \rightarrow E) \rightarrow \forall\alpha A$ HG (3)
 4. $\forall\alpha\neg(A \rightarrow E) \rightarrow \neg E$ AF (1)
 5. $\forall\alpha\neg(A \rightarrow E) \rightarrow \neg(\forall\alpha A \rightarrow E)$ AF (3, 4)
 6. $(\forall\alpha A \rightarrow E) \rightarrow \neg\forall\alpha\neg(A \rightarrow E)$ AF (5)

2. Wie die folgende Ableitung zeigt, könnte man ohne die Beschränkung z.B. aus dem harmlosen Satz ‘ $F^1 a \wedge \neg F^1 b$ ’ den Widerspruch ‘ $F^1 a \wedge \neg F^1 a$ ’ ableiten.

1. $F^1 a \wedge \neg F^1 b$ Ann.
2. $F^1 a \rightarrow \neg F^1 b$ AF (1)
3. $F^1 a \rightarrow \forall x\neg F^1 x$ HG (2)*
4. $\forall x\neg F^1 x \rightarrow \neg F^1 a$ A4
5. $F^1 a \rightarrow \neg F^1 a$ AF (3, 4)
6. $\neg F^1 a$ AF (5)
7. $F^1 a \wedge \neg F^1 a$ AF (1, 6)

3. a) Sei τ eine Individuenkonstante, die in A und D nicht vorkommt, dann ist das Folgende eine Ableitung von $A \rightarrow \forall\alpha D$ aus $\forall\alpha(A \rightarrow D)$.

1. $\forall\alpha(A \rightarrow D)$ Ann.
2. $\forall\alpha(A \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow [D]_{\alpha}^{\tau})$ A4
3. $A \rightarrow [D]_{\alpha}^{\tau}$ MP (1, 2)
4. $A \rightarrow \forall\alpha D$ HG (3)

Also gilt:

(i) $\forall\alpha(A \rightarrow D) \vdash_{AK} A \rightarrow \forall\alpha D$.

Hieraus ergibt sich durch einmalige Anwendung des Deduktionstheorems A5.

b) Angenommen, mit der Regel (G) wird von $[D]_{\alpha}^{\tau}$ auf $\forall\alpha D$ geschlossen. In diesem Fall kommt τ in den Prämissen der Ableitung (falls vorhanden) und in D nicht vor. Sei nun C ein Satz von PL, in dem τ ebenfalls nicht vorkommt, dann ist das Folgende eine Ableitung von $\forall\alpha D$ aus $[D]_{\alpha}^{\tau}$:

1. $[D]_{\alpha}^{\tau}$ Ann.
2. $[D]_{\alpha}^{\tau} \rightarrow ((C \rightarrow (C \rightarrow C)) \rightarrow [D]_{\alpha}^{\tau})$ A1
3. $(C \rightarrow (C \rightarrow C)) \rightarrow [D]_{\alpha}^{\tau}$ MP (1, 2)
4. $(C \rightarrow (C \rightarrow C)) \rightarrow \forall\alpha D$ HG (3)
5. $C \rightarrow (C \rightarrow C)$ A1
6. $\forall\alpha D$ MP (4, 5)

c) Angenommen, mit der Regel (HG) wird von $A \rightarrow [D]_{\alpha}^{\tau}$ auf $A \rightarrow \forall\alpha D$ geschlossen. In diesem Fall kommt τ in den Prämissen der Ableitung (falls vorhanden) sowie in A und D nicht vor. Es gilt also $A \rightarrow [D]_{\alpha}^{\tau} = [A \rightarrow D]_{\alpha}^{\tau}$; und deshalb ist das Folgende eine Ableitung von $A \rightarrow \forall\alpha D$ aus $A \rightarrow [D]_{\alpha}^{\tau}$:

1. $A \rightarrow [D]_{\alpha}^{\tau}$ Ann.
2. $\forall\alpha(A \rightarrow D)$ G (1)
3. $\forall\alpha(A \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow \forall\alpha D)$ A5
4. $A \rightarrow \forall\alpha D$ MP (2, 3)

Lösungen zu Kapitel 21

1. a) $\forall x F^2 ax$
 D = die Menge aller Menschen;
 a : Hans;
 F^2 : ... liebt ---.
- b) $\forall x F^2 xa$
 Interpretation wie bei a).
- c) $\neg\forall x(F^1 x \rightarrow G^1 x)$
 D = die Menge aller materiellen Dinge;
 F^1 : ... glänzt;
 G^1 : ... ist Gold.
- d) $\forall x(F^1 x \rightarrow \neg G^1 x)$
 D = die Menge aller Hunde;
 F^1 : ... bellt;
 G^1 : ... beißt.
- e) $\forall x(F^1 x \rightarrow \neg G^1 x)$
 D = die Menge aller Löwen;
 F^1 : ... schläft;
 G^1 : ... ist gefährlich.

- f) $\forall x(F^1x \rightarrow \forall y(G^1y \wedge H^1y \rightarrow F^2xy))$
 $D =$ die Menge aller Lebewesen;
 $F^1:$... ist ein Mensch;
 $G^1:$... ist ein Hund;
 $H^1:$... ist klein;
 $F^2:$... mag ---.

Bzw.

- $\forall x\forall y(F^1x \rightarrow (G^1y \wedge H^1y \rightarrow F^2xy))$
 Interpretation wie bei f).

Bzw.

- $\forall x\forall y(F^1x \wedge G^1y \wedge H^1y \rightarrow F^2xy)$
 Interpretation wie bei f).

- g) $\forall x\forall y(F^2xy \rightarrow G^2xy)$
 $D =$ die Menge aller Menschen;
 $F^2:$... ist mit --- befreundet;
 $G^2:$... kennt ---.
- h) $\forall x(F^1x \rightarrow F^2xa \wedge F^2xx)$
 $D =$ die Menge der natürlichen Zahlen;
 $a:$ 1;
 $F^1:$... ist eine Primzahl;
 $F^2:$... ist durch --- teilbar.
- i) $\forall x(F^1x \rightarrow (F^2xa \rightarrow G^1x))$
 $D =$ die Menge der natürlichen Zahlen;
 $a:$ 2;
 $F^1:$... ist eine Primzahl;
 $G^1:$... ist ungerade;
 $F^2:$... ist größer als ---.

Bzw.

- $\forall x(F^1x \wedge F^2xa \rightarrow G^1x)$
 Interpretation wie bei i).

- j) $\forall xF^1x \rightarrow \neg\forall xG^1x$
 $D =$ die Menge aller Raben;
 $F^1:$... ist schwarz;
 $G^1:$... ist weiß.
- k) $\forall x\forall y\forall z(F^3xyz \rightarrow F^2xy \wedge F^2xz)$
 $D =$ die Menge der natürlichen Zahlen;
 $F^2:$... ist größer als ---;
 $F^3:$... ist die Summe von --- und ---.

- l) $\forall x\neg(F^2xa \wedge G^2xa)$
 $D =$ die Menge der natürlichen Zahlen;
 $a:$ 1;
 $F^2:$... ist größer als ---;
 $G^2:$... ist kleiner als ---.

Bzw.

- $\neg\exists x(F^2xa \wedge G^2xa)$
 Interpretation wie bei l).

- m) $\exists x(F^1x \wedge F^2ax \wedge \forall y(G^2ya \rightarrow F^3yax))$
 $D =$ die Menge aller Menschen und aller materiellen
 Gegenstände;
 $a:$ Hans;
 $F^1:$... ist ein Haus;
 $F^2:$... ist der Eigentümer von ---;
 $G^2:$... ist ein Nachbar von ---;
 $F^3:$... beneidet --- um ---.

- n) $\exists xF^1x \rightarrow \neg\forall xG^1x$
 $D =$ die Menge aller Schwäne;
 $F^1:$... ist schwarz;
 $G^1:$... ist weiß.
- o) $\forall x\forall y\exists zF^3zxy$
 $D =$ die Menge der rationalen Zahlen;
 $F^3:$... liegt zwischen --- und ---.
- p) $\forall x\forall y(F^2xy \leftrightarrow \exists zF^3xyz)$
 $D =$ die Menge der natürlichen Zahlen;
 $F^2:$... ist durch --- teilbar;
 $F^3:$... ist das Produkt von --- und ---.
- q) $\forall x\forall y(F^2xy \rightarrow \neg(G^2xy \leftrightarrow F^1x \wedge F^1y))$
 $D =$ die Menge aller Menschen;
 $F^1:$... ist unglücklich;
 $F^2:$... ist mit --- verheiratet;
 $G^2:$... und --- lieben sich.

2. Weil Satz (1) nicht behauptet, dass die Väter aller Schweden ebenfalls Schweden sind.

3. a) Erste Lesart: $\forall x(H^1x \rightarrow F^1x \wedge G^1x)$
 Zweite Lesart: $\forall x(F^1x \wedge H^1x \rightarrow G^1x)$
 D = die Menge aller Menschen;
 F^1 : ... ist eine Frau;
 G^1 : ... ist groß;
 H^1 : ... ist als Schornsteinfeger geeignet.
- b) Erste Lesart: $\forall x(F^2ax \rightarrow F^1x \wedge G^1x)$
 Zweite Lesart: $\forall x(F^2ax \wedge F^1x \rightarrow G^1x)$
 D = die Menge aller Menschen;
 a : Anna;
 F^1 : ... ist Fleisch;
 G^1 : ... stammt aus artgerechter Tierhaltung;
 F^2 : ... isst ---.
- c) Erste Lesart: $\exists x(F^1x \wedge \forall y(G^1y \rightarrow F^2yx))$
 Zweite Lesart: $\forall y(G^1y \rightarrow \exists x(F^1x \wedge F^2yx))$
 D = die Menge aller Zellen;
 F^1 : ... ist eine ektodermale Vorläuferzelle;
 G^1 : ... ist eine Nervenzelle;
 F^2 : ... entwickelt sich aus ---.
- d) Erste Lesart: $\exists x((G^1x \wedge G^2ax) \wedge \forall y(F^1y \rightarrow F^2xy))$
 Zweite Lesart: $\forall y(F^1y \rightarrow \exists x((G^1x \wedge G^2ax) \wedge F^2xy))$
 D = die Menge aller Menschen, Bücher und Themen;
 a : Bertrand Russell;
 F^1 : ... ist ein philosophisches Thema;
 G^1 : ... ist ein Buch;
 F^2 : ... handelt von ---;
 G^2 : ... hat --- geschrieben.

Lösungen zu Kapitel 22

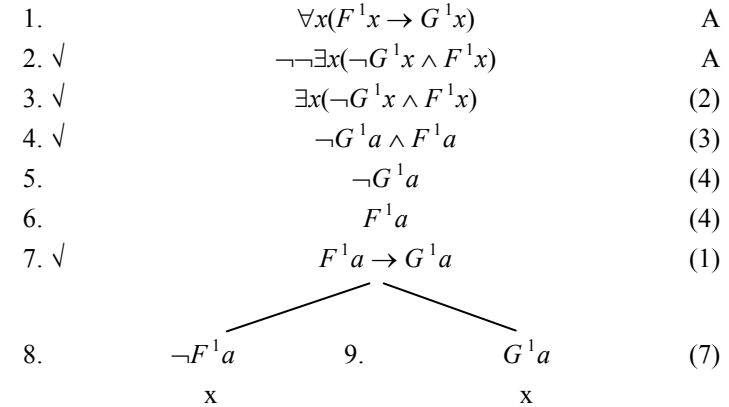
1. (b), (d), (e) und (g) sind wahr, (a), (c) und (f) falsch.

2. (a) Übersetzung:

- (a.1') $\forall x(F^1x \rightarrow G^1x)$
 (a.2') $\neg\exists x(\neg G^1x \wedge F^1x)$

D = die Menge aller Argumente;
 F^1 : ... ist schlüssig;
 G^1 : ... ist gültig.

Wie der folgende Wahrheitsbaum zeigt, ist das Argument gültig:



(b) Übersetzung:

- (b.1') $\forall x(F^1x \rightarrow G^1x)$
 (b.2') $\forall x(\exists y(F^1y \wedge F^2xy) \rightarrow \exists y(G^1y \wedge F^2xy))$

D = die Menge aller Tiere und aller Teile von Tieren;
 F^1 : ... ist ein Pferd;
 G^1 : ... ist ein Tier;
 F^2 : ... ist ein Kopf von ---.

Wie der Wahrheitsbaum auf der nächsten Seite zeigt, ist das Argument gültig.

(c) Übersetzung:

- (c.1') $\forall x\exists yF^2yx$
 (c.2') $\exists y\forall xF^2yx$

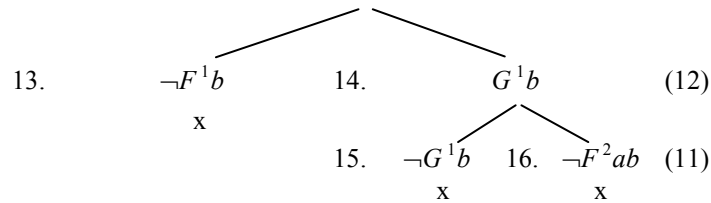
D = die Menge aller Ereignisse;
 F^2 : ... verursacht ---.

Dieser Fehlschluss dürfte inzwischen bekannt sein. Gegenbeispiel:

D = die Menge der natürlichen Zahlen;
 F^2 : ... ist größer als ---.

Wahrheitsbaum für (b):

- 1. $\forall x(F^1x \rightarrow G^1x)$ A
- 2. $\neg \forall x(\exists y(F^1y \wedge F^2xy) \rightarrow \exists y(G^1y \wedge F^2xy))$ A
- 3. $\exists x \neg(\exists y(F^1y \wedge F^2xy) \rightarrow \exists y(G^1y \wedge F^2xy))$ (2)
- 4. $\neg(\exists y(F^1y \wedge F^2ay) \rightarrow \exists y(G^1y \wedge F^2ay))$ (3)
- 5. $\exists y(F^1y \wedge F^2ay)$ (4)
- 6. $\neg \exists y(G^1y \wedge F^2ay)$ (4)
- 7. $F^1b \wedge F^2ab$ (5)
- 8. F^1b (7)
- 9. F^2ab (7)
- 10. $\forall y \neg(G^1y \wedge F^2ay)$ (6)
- 11. $\neg(G^1b \wedge F^2ab)$ (10)
- 12. $F^1b \rightarrow G^1b$ (1)



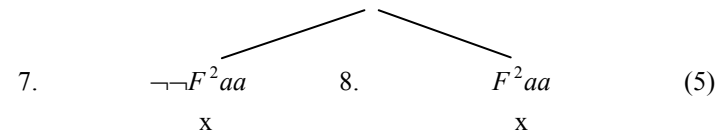
(d) Übersetzung:

- (d.1') $\exists y \forall x(\neg F^2xx \rightarrow F^2yx)$
- (d.2') $\exists x F^2xx$

D = die Menge aller Männer von X;
 F^2 : ... rasiert ---.

Wie der Wahrheitsbaum auf der nächsten Seite zeigt, ist das Argument gültig:

- 1. $\exists y \forall x(\neg F^2xx \rightarrow F^2yx)$ A
- 2. $\neg \exists x F^2xx$ A
- 3. $\forall x(\neg F^2xx \rightarrow F^2ax)$ (1)
- 4. $\forall x \neg F^2xx$ (2)
- 5. $\neg F^2aa \rightarrow F^2aa$ (3)
- 6. $\neg F^2aa$ (4)



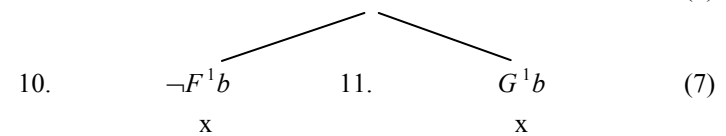
(e) Übersetzung:

- (e.1') $\exists x(F^1x \wedge F^2xa)$
- (e.2') $\forall x(F^1x \rightarrow G^1x)$
- (e.3') $\exists x G^1x$

D = die Menge aller Zahlen;
 a : 10;
 F^1 : ... ist eine Primzahl;
 G^1 : ... ist ein nicht-physikalischer Gegenstand;
 F^2 : ... ist kleiner als ---.

Wie der folgende Wahrheitsbaum zeigt, ist das Argument gültig:

- 1. $\exists x(F^1x \wedge F^2xa)$ A
- 2. $\forall x(F^1x \rightarrow G^1x)$ A
- 3. $\neg \exists x G^1x$ A
- 4. $F^1b \wedge F^2ba$ (1)
- 5. F^1b (4)
- 6. F^2ba (4)
- 7. $F^1b \rightarrow G^1b$ (2)
- 8. $\forall x \neg G^1x$ (3)
- 9. $\neg G^1b$ (8)



(f) Übersetzung:

$$(f.1') \quad \forall x(F^1x \wedge \exists y(G^1y \wedge F^2xy) \rightarrow \exists y(H^1y \wedge G^2xy))$$

$$(f.2') \quad \forall x(H^1x \rightarrow \neg K^1x)$$

$$(f.3') \quad \neg \forall xK^1x$$

D = die Menge aller Menschen, aller farbigen Dinge und aller Erfahrungen;

F^1 : ... ist ein Mensch;

G^1 : ... ist farbig;

H^1 : ... ist eine Farberfahrung;

K^1 : ... kann wissenschaftlich untersucht werden;

F^2 : ... sieht ---

G^2 : ... hat ---.

Das Argument ist nicht gültig. Gegenbeispiel:

D = die Menge der natürlichen Zahlen;

F^1 : ... ist gerade;

G^1 : ... ist ungerade;

H^1 : ... ist kleiner als 0;

K^1 : ... ist größer oder gleich 0;

F^2 : ... ist identisch mit ---

G^2 : ... ist größer als ---.

(g) Übersetzung:

$$(g.1') \quad \neg \exists x(F^1x \wedge \neg \exists yF^2yx) \rightarrow F^1a \wedge \neg \exists yF^2ya$$

$$(g.2') \quad \exists x(F^1x \wedge \neg \exists yF^2yx)$$

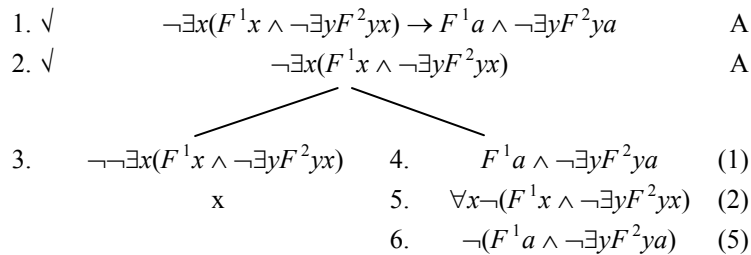
D = die Menge aller Regeln und Ausnahmen;

a : die Regel „Es gibt keine Regel ohne Ausnahme“

F^1 : ... ist eine Regel;

F^2 : ... ist eine Ausnahme für ---.

Wie der folgende Wahrheitsbaum zeigt, ist das Argument gültig:



x

3. Alle Bewohner von X fürchten den Mörder. Wenn der Mörder also ein Bewohner von X ist, dann fürchtet er sich selbst. Tatsächlich ist der Mörder ein Bewohner von X, denn er wohnt ja in der Marktgasse, in der Altstadt von X. Also fürchtet der Mörder sich selbst. Angeblich fürchtet der Mörder jedoch nur die Kommissare Müller und Meier. D.h., einer von diesen muss der Mörder sein. Kommissar Müller kann es nicht sein, denn der Mörder wohnt nicht im selben Haus wie Kommissar Müller. Also ist Kommissar Meier der Mörder. Da der Mörder in der Marktgasse 27 oder 29 wohnt, aber nicht im selben Haus wie Müller, d.h. nicht in Hausnummer 27, wohnt Kommissar Meier, der Mörder, in der Marktgasse 29.