18 Wahrheitsbäume zur Beurteilung der logischen Eigenschaften von Sätzen der Sprache PL

Die Wahrheitsbaummethode lässt sich auch zur Beurteilung der logischen Wahrheit von Sätzen der Sprache PL verwenden – und zur Beurteilung des Bestehens von logischen Folgerungsbeziehungen zwischen Sätzen von PL.

Wir müssen nur die uns schon bekannten Regeln um vier weitere Regeln ergänzen.

(DN) $\neg\neg A$

A

(S) $A \rightarrow B$

$\neg A$ B

(K) $A \wedge B$

A

B

(B) $A \leftrightarrow B$

A $\neg A$

B $\neg B$

(A) $A \vee B$

A B

(NK) $\neg (A \wedge B)$

$\neg A \qquad \neg B$

(NA) $\neg (A \rightarrow B)$

A

$\neg B$

(NA) $\neg (A \vee B)$

$\neg A$

$\neg B$

(NB) $\neg (A \leftrightarrow B)$

$A \qquad \neg A$

$\neg B \qquad B$

(U) $\forall \alpha A$

$[A]^{\tau}_{\alpha}$

Dabei darf τ jede beliebige Individuenkonstante sein.

(E) $\exists \alpha A$

$[A]^{\tau}_{\alpha}$

Dabei muss τ eine Individuenkonstante sein, die in dem Ast, an den $[A]^{\tau}_{\alpha}$ angefügt werden soll, bisher *nicht* vorgekommen ist.

(NU) $\neg \forall \alpha A$

$\exists \alpha \neg A$

(NE) $\neg \exists \alpha A$

$\forall \alpha \neg A$

Satz 18.1

Ein Satz *A* der Sprache PL ist logisch wahr, wenn jeder Ast eines Wahrheitsbaums der *Negation* dieses Satzes, der nur mit Hilfe der zuvor angegebenen Regeln entwickelt wurde, mit einem ‘x’ geschlossen werden kann, da in ihm ein Satz von PL sowohl in negierter wie in nicht negierter Form vorkommt.

Beispiel 1: $\models_{PL} \forall x F^1 x \rightarrow \exists x F^1 x$

1.	√	$\neg(\forall x F^1 x \rightarrow \exists x F^1 x)$	A
2.		$\forall x F^1 x$	(1)
3.	√	$\neg\exists x F^1 x$	(1)
4.		$\forall x \neg F^1 x$	(3)
5.		$F^1 a$	(2)
6.		$\neg F^1 a$	(4)
		x	

Beispiel 2: $\models_{PL} \exists x F^1 x \rightarrow \forall x F^1 x$???

1.	√	$\neg(\exists x F^1 x \rightarrow \forall x F^1 x)$	A
2.	√	$\exists x F^1 x$	(1)
3.	√	$\neg\forall x F^1 x$	(1)
4.		$\exists x \neg F^1 x$	(3)
5.		$F^1 a$	(2)
6.		$\neg F^1 a$	(4) ↯

Gegenbeispiel

$V(F^1)$ darf nicht leer, aber auch nicht mit D identisch sein.

D = die Menge der natürlichen Zahlen
$V(F^1)$ = die Menge der geraden natürl. Zahlen

$D = \{1, 2\}$
$V(F^1) = \{1\}$

Beispiel 3: $\models_{PL} \neg\forall x(F^1x \wedge \exists y\neg F^1y)$

1.	√	$\neg\neg\forall x(F^1x \wedge \exists y\neg F^1y)$	A
2.		$\forall x(F^1x \wedge \exists y\neg F^1y)$	(1)
3.	√	$F^1a \wedge \exists y\neg F^1y$	(2)
4.		F^1a	(3)
5.	√	$\exists y\neg F^1y$	(3)
6.		$\neg F^1b$	(5)
7.	√	$F^1b \wedge \exists y\neg F^1y$	(2)
8.		F^1b	(7)
9.		$\exists y\neg F^1y$	(7)
		x	

Beispiel 4: $\models_{PL} \forall x(F^1x \rightarrow G^1x) \rightarrow (\forall xF^1x \rightarrow \forall xG^1x)$

1.	√	$\neg(\forall x(F^1x \rightarrow G^1x) \rightarrow (\forall xF^1x \rightarrow \forall xG^1x))$	A
2.		$\forall x(F^1x \rightarrow G^1x)$	(1)
3.	√	$\neg(\forall xF^1x \rightarrow \forall xG^1x)$	(1)
4.		$\forall xF^1x$	(3)
5.	√	$\neg\forall xG^1x$	(3)
6.	√	$\exists x\neg G^1x$	(5)
7.		$\neg G^1a$	(6)
8.		F^1a	(4)
9.	√	$F^1a \rightarrow G^1a$	(2)

10.	$\neg F^1a$	11.	G^1a	(9)
	x		x	

Beispiel 5

$\models_{PL} \forall y \exists x F^2 xy \rightarrow \exists x \forall y F^2 xy$???

1.	√	$\neg(\forall y \exists x F^2 xy \rightarrow \exists x \forall y F^2 xy)$	A
2.		$\forall y \exists x F^2 xy$	(1)
3.	√	$\neg \exists x \forall y F^2 xy$	(1)
4.		$\forall x \neg \forall y F^2 xy$	(3)
5.	√	$\exists x F^2 xa$	(2)
6.		$F^2 ba$	(5)
7.	√	$\neg \forall y F^2 by$	(4)
8.		$\exists y \neg F^2 by$	(7)
9.		$\neg F^2 ba$	(8) ↯

1.	√	$\neg(\forall y \exists x F^2xy \rightarrow \exists x \forall y F^2xy)$	A
2.		$\forall y \exists x F^2xy$	(1)
3.	√	$\neg \exists x \forall y F^2xy$	(1)
4.		$\forall x \neg \forall y F^2xy$	(3)
5.	√	$\exists x F^2xa$	(2)
6.		F^2ba	(5)
7.	√	$\neg \forall y F^2by$	(4)
8.	√	$\exists y \neg F^2by$	(7)
9.		$\neg F^2bc$	(8)
10.		$\exists x F^2xc$	(2)
11.		F^2bc	(10) ↯

1.	√	$\neg(\forall y \exists x F^2xy \rightarrow \exists x \forall y F^2xy)$	A
2.		$\forall y \exists x F^2xy$	(1)
3.	√	$\neg \exists x \forall y F^2xy$	(1)
4.		$\forall x \neg \forall y F^2xy$	(3)
5.	√	$\exists x F^2xa$	(2)
6.		F^2ba	(5)
7.	√	$\neg \forall y F^2by$	(4)
8.	√	$\exists y \neg F^2by$	(7)
9.		$\neg F^2bc$	(8)
10.	√	$\exists x F^2xc$	(2)
11.		F^2dc	(10)
12.	√	$\neg \forall y F^2dy$	(4)
13.	√	$\exists y \neg F^2dy$	(12)
14.		$\neg F^2de$	(13)
		...	

Gegenbeispiel

D = die Menge der natürlichen Zahlen
$V(F^2) = \{<x, y>; x > y\}$

$D = \{1, 2\}$
$V(F^2) = \{<1, 1>; <2, 2>\}$

Satz 18.2

Sind $A_1, \ldots, A_n$ und A Sätze der Sprache PL, dann folgt der Satz A logisch aus den Sätzen $A_1, \ldots, A_n$, wenn jeder Ast eines Wahrheitsbaums, dessen Stamm aus den Sätzen $A_1, \ldots, A_n$ und der Negation des Satzes A gebildet wird und der nur mit Hilfe der oben angegebenen Regeln entwickelt wurde, mit einem 'x' geschlossen werden kann, da in ihm ein Satz von PL sowohl in negierter wie in nicht negierter Form vorkommt.

Beispiel 1

$$\forall x(F^1x \rightarrow G^1x), \exists x(F^1x \wedge H^1x) \models_{PL} \exists x(G^1x \wedge H^1x)$$

1.		$\forall x(F^1x \rightarrow G^1x)$	A
2.	√	$\exists x(F^1x \wedge H^1x)$	A
3.	√	$\neg\exists x(G^1x \wedge H^1x)$	A
4.		$\forall x\neg(G^1x \wedge H^1x)$	(3)
5.	√	$F^1a \wedge H^1a$	(2)
6.		F^1a	(5)
7.		H^1a	(5)
8.	√	$F^1a \rightarrow G^1a$	(1)

9.	$\neg F^1a$		10.	G^1a	(8)
	x		11. √	$\neg(G^1a \wedge H^1a)$	(4)
			12.	$\neg G^1a$	13. $\neg H^1a$ (11)
				x	x

Beispiel 2

$\exists xF^1x, G^1a \models_{PL} \exists x(F^1x \wedge G^1x)$???

1.		$\exists xF^1x$	A
2.		G^1a	A
3.	√	$\neg\exists x(F^1x \wedge G^1x)$	A
4.		$\forall x\neg(F^1x \wedge G^1x)$	(3)
5.	√	$\neg(F^1a \wedge G^1a)$	(4)

6.	$\neg F^1a$		7.	$\neg G^1a$	(5)
8.	F^1a	(1) ↯		x	

Gegenbeispiel

$V(F^1)$ und $V(G^1)$ dürfen beide nicht leer sein.

‚a' muss ein Element von $V(G^1)$ zugeordnet werden.

$V(F^1)$ und $V(G^1)$ dürfen keine gemeinsamen Elemente haben; ihr Schnitt muss leer sein.
$(V(F^1) \cap V(G^1) = \emptyset)$

D = die Menge der natürlichen Zahlen
$V(F^1)$ = die Menge der geraden natürl. Zahlen
$V(G^1)$ = die Menge der ungeraden natürl. Zahlen
$V(a) = 3$

$D = \{1, 2\}$
$V(F^1) = \{1\}$, $V(G^1) = \{2\}$, $V(a) = 2$

Beispiel 3

$\exists x \forall y F^2xy \models_{PL} \forall y \exists x F^2xy$

1.	√	$\exists x \forall y F^2xy$	A
2.	√	$\neg \forall y \exists x F^2xy$	A
3.	√	$\exists y \neg \exists x F^2xy$	(2)
4.		$\forall y F^2ay$	(1)
5.	√	$\neg \exists x F^2xb$	(3)
6.		$\forall x \neg F^2xb$	(5)
7.		F^2ab	(4)
8.		$\neg F^2ab$	(6)
		x	

Beispiel 4

$$\forall x \forall y \forall z (F^2xy \wedge F^2yz \rightarrow F^2xz),\ \forall x \neg F^2xx \models_{PL} \forall x \forall y (F^2xy \rightarrow \neg F^2yx)$$

1.		$\forall x \forall y \forall z (F^2xy \wedge F^2yz \rightarrow F^2xz)$	A
2.		$\forall x \neg F^2xx$	A
3.	√	$\neg \forall x \forall y (F^2xy \rightarrow \neg F^2yx)$	A
4.	√	$\exists x \neg \forall y (F^2xy \rightarrow \neg F^2yx)$	(3)
5.	√	$\neg \forall y (F^2ay \rightarrow \neg F^2ya)$	(4)
6.	√	$\exists y \neg (F^2ay \rightarrow \neg F^2ya)$	(5)
7.	√	$\neg (F^2ab \rightarrow \neg F^2ba)$	(6)
8.		F^2ab	(7)
9.		$\neg\neg F^2ba$	(7)

10.		$\neg F^2aa$	(2)
11.		$\forall y \forall z (F^2ay \wedge F^2yz \rightarrow F^2az)$	(1)
12.		$\forall z (F^2ab \wedge F^2bz \rightarrow F^2az)$	(11)
13.	√	$F^2ab \wedge F^2ba \rightarrow F^2aa$	(12)
14.	√	$\neg (F^2ab \wedge F^2ba)$	(13)
15.		F^2aa	(13)
		x	
16.		$\neg F^2ab$	(14)
		x	
17.		$\neg F^2ba$	(14)
		x	

Beispiel 5

$$\forall x \forall y \forall z (F^2xy \wedge F^2yz \rightarrow F^2xz),\ \forall x \forall y (F^2xy \rightarrow F^2yx) \models_{PL} \forall x F^2xx \quad ???$$

1.		$\forall x \forall y \forall z (F^2xy \wedge F^2yz \rightarrow F^2xz)$	A
2.		$\forall x \forall y (F^2xy \rightarrow F^2yx)$	A
3.	√	$\neg \forall x F^2xx$	A
4.	√	$\exists x \neg F^2xx$	(3)
5.		$\neg F^2aa$	(4)
6.		$\forall y \forall z (F^2ay \wedge F^2yz \rightarrow F^2az)$	(1)
7.		$\forall z (F^2aa \wedge F^2az \rightarrow F^2az)$	(6)

8.	√	$F^2aa \wedge F^2aa \rightarrow F^2aa$			(7)
9.		$\forall y (F^2ay \rightarrow F^2ya)$			(2)
10.	√	$F^2aa \rightarrow F^2aa$			(9)
11.		$\neg F^2aa$	12.	F^2aa x	(10)
13.	√	$\neg (F^2aa \wedge F^2aa)$	14.	F^2aa x	(8)
15.		$\neg F^2aa$	16.	$\neg F^2aa$	(13)

Wenn man bei der Entwicklung der allquantifizierten Sätze in den Zeilen 1., 2., 6., 8. und 9. die Individuenvariablen '*x*', '*y*' und '*z*' alle durch die Individuenkonstante '*a*' ersetzt, lässt sich der Wahrheitsbaum nicht abschließen.

Aber auch bei der Verwendung anderer Individuenkonstanten kommt man nicht weiter, da sich entweder ein ähnlicher Wahrheitsbaum ergibt oder die Zeile 5. nicht sinnvoll eingesetzt werden kann.

Gegenbeispiel

$D = \{1, 2\}$	$D = \{1\}$
$V(F^2) = \{<1, 1>\}$	$V(F^2) = \varnothing$

Tipps

Im Allgemeinen ist es am vernünftigsten, die Regeln in der folgenden Reihenfolge anzuwenden:

- Zuerst sollten die nicht-verzweigenden AL-Regeln und die Regeln (NU) und (NE) angewendet werden.
- Danach, wenn möglich, die Regel (E).
- Dann die verzweigenden AL-Regeln.
- Dann erst die Regel (U).