Frank Riedel (Bielefeld)

Was ist Finanzmathematik? Erfolg und Grenzen einer wissenschaftlichen Revolution

Frank Riedel, Direktor des Instituts für Mathematische Wirtschaftsforschung (IMW) der Universität Bielefeld, leitete von März bis Juli 2015 die ZiF-Forschungsgruppe ›Robuste Finanzmärkte‹. Seine Forschungsschwerpunkte sind die Finanzmathematik und die Spieltheorie. Er ist Autor des populärwissenschaftlichen Buches *Die Schuld der Ökonomen* (Econ Verlag 2013).

Die Finanzmathematik ist die erfolgreichste Theorie, die (mathematische) Ökonomen je entwickelt haben. Kaum eine gesellschaftliche Theorie wurde so umfassend in die Praxis umgesetzt, blieb aber zugleich in der Öffentlichkeit völlig unverstanden: Weder Medien noch Politik wissen, was genau in dieser Wissenschaft vorgeht, und leider wissen dies auch viele der Wirtschaftswissenschaftler und Juristen nicht, die unsere Politiker beraten. In diesem Artikel möchte ich über den Mythos Finanzmathematik aufklären und die natürlichen Grenzen dieser Theorie aufzeigen, deren Robustifizierung zentral für die Forschungsgruppe ›Robuste Finanzmärkte‹ am Bielefelder ZiF 2015 war.

Bevor wir uns näher mit der Finanzmathematik beschäftigen, ist es zunächst wichtig, mit einem weit verbreiteten Fehlurteil aufzuräumen: Es geht nicht um das Vorhersagen von Kursen! Natürlich gibt es Spekulanten, die mit Hilfe hoch entwickelter statistischer Methoden, Charttechniken oder manchmal eher mystisch anmutender Verfahren zukünftige Kurse vorhersagen wollen, aber dies ist gerade nicht Finanzmathematik: ganz im Gegenteil steht die Finanzmathematik gerade auf der Grundannahme, dass *die systematische Vorhersage von Kursen* unmöglich ist.

Eine Wissenschaft baut man auf einem starken und einfachen Grundprinzip auf, das in seiner ganzen Reinheit in der Erfahrungswelt nicht immer erfüllt sein muss. Denken Sie etwa an die Newtonsche Physik, die auf dem Trägheitsprinzip beruht, nach dem ein Körper stets seine Geschwindigkeit beibehält, solange keine äußeren Kräfte auf ihn wirken. Das entsprechende Grundprinzip der Finanzmathematik ist Arbitragefreiheit, was man in erster Annäherung als die Unmöglichkeit, Kurse vorherzusagen, beschreiben kann. Welche Rechtfertigung kann es hierfür geben?

Wenn ein Händler den morgigen Kurs einer riskanten Aktie perfekt vorhersagen könnte, so könnte er Gewinne einstreichen, ohne ein Risiko einzugehen. Wenn dies allgemein bekannt wäre, würden alle Händler dies sofort kopieren und die Preise der Aktien würden sich entsprechend anpassen – die Arbitragegelegenheit verschwindet. Auf einem perfekten Markt (der so natürlich in der Praxis nicht existiert, wie es auch die reibungslose Welt auf der Erde nicht gibt) gibt es keine Arbitrage.

Auf dem Prinzip der Arbitragefreiheit steht das Gebäude der Finanzmathematik. Es begründet auch ihren Erfolg und erklärt, warum sie in der Praxis besser funktioniert als alle anderen gesellschaftswissenschaftlichen Theorien: Die Finanzmathematik kommt ohne Annahmen über das Verhalten der menschlichen Akteure aus. Alle anderen ökonomischen, soziologischen oder psychologischen Theorien müssen mehr oder weniger plausible Annahmen an das menschliche Verhalten stellen. Im Bereich der Wirtschaftswissenschaften wird etwa der *Homo Oeconomicus* unterstellt, ein kühles, rational handelndes Wesen ohne Emotionen und Fehler. Da kaum ein Mensch diesem Modell hinreichend gut entspricht, sind viele wirtschaftswissenschaftliche Modelle zur Prognose der Wirklichkeit ungeeignet.

Lassen Sie uns zunächst versuchen, das No-Arbitrage-Prinzip anhand eines kleinen Beispiels zu verstehen. Wenn ein Apfel einen Euro kostet und eine Birne zwei Euro, was kostet dann ein Korb aus zwei Äpfeln und drei Birnen? Solche Fragen kennen Sie aus der Schule, und Sie wussten schon damals, dass die Antwort acht Euro lautet. Nun wenden wir dies einmal ökonomisch an. Wenn der Korb nämlich etwa für zehn Euro gehandelt würde, könnte man die Äpfel und Birnen einzeln kaufen und dann den Korb für zehn Euro verkaufen, mit einem Gewinn von zwei Euro.

Eventuell wirkt dieses Beispiel nun zu simpel; dies ist ja nichts anderes als das berühmte Gesetz des einen (im Sinne von eindeutigen) Preises. Daraus soll sich eine hoch komplexe Wissenschaft entwickeln lassen? Überraschenderweise lautet die Antwort ja; allerdings bedurfte es hierfür wichtiger Entwicklungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie, die seit den späten sechziger und siebziger Jahren des letzten Jahrhunderts den Beginn der Finanzmathematik ermöglichten.

Die Wahrscheinlichkeitstheorie ermöglicht es, komplexe Ereignisse der Welt in einfache ›Atome‹ zu zerlegen. Die Finanzmathematik analysiert Finanztransaktionen auf den einzelnen Atomen. Man nutzt dann die Kraft der Mathematik und der Rechner, um aus den kleinen simplen Rechnungen auf atomarer Ebene komplexe Ereignisse zusammenzusetzen. Dies wollen wir uns nun anschauen.

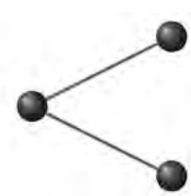

Abbildung 1: Das Atom der Finanzmathematik.

In Abbildung 1 sehen Sie das ›Atom‹ der Finanzmathematik: Der linke Punkt steht für ›heute‹ oder den aktuellen Punkt, an dem wir uns befinden. Da die Zukunft unsicher ist, verzweigt sich der kleine Baum, den wir hier sehen, und rechts sehen wir die zwei möglichen zukünftigen Zustände A und B, die morgen oder im nächsten Zeitpunkt möglich sind. Die beiden Zustände nennt man auch oft *up* und *down*.

Es liegt der Einwand nahe, dass doch die Realität viel komplexer ist, da es ja viel mehr als bloß zwei mögliche Zustände gibt, die eintreten können. Das ist natürlich richtig. Zwei Dinge sind aber nun wesentlich: Zum einen beginnt erfolgreiche Wissenschaft, wie ich oben bereits in Zusammenhang mit dem Prinzip der Arbitragefreiheit gesagt habe, stets mit den elementaren, einfachen

Bausteinen und baut daraus die komplexen Zusammenhänge auf. Wenn man versucht, stets gleich das große Ganze mitzudenken, läuft man auch Gefahr, mehr oder weniger groß zu scheitern. Zum anderen ist eine der großen Erkenntnisse der Finanzmathematik, dass wir komplexe Ereignisse gut abbilden können, indem wir die Länge des Zeitintervalls kleiner und kleiner machen und dieses einfache Atom stets wiederholen. Wir können also schon das ›große Ganze‹ denken – aber erst nachdem wir das atomare Kleine verstanden haben.

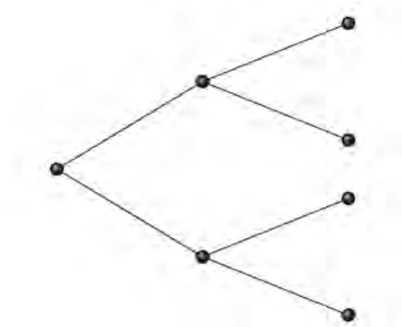

Abbildung 2: Komplexe Unsicherheiten aus dem Atom zusammensetzen. Ein Ereignisbaum für zwei Zeitschritte.

Wenn wir etwa zwei Perioden aus dem Atom zusammensetzen, so sieht unser Modell aus wie in Abbildung 2. Nach zwei Perioden gibt es bereits vier Zustände: Wir können zwei Mal nach oben laufen, einmal nach oben und dann nach unten, oder zuerst nach unten und dann nach oben oder schließlich zweimal nach unten. Hier ist wichtig zu verstehen, dass wir die Gesamtlänge konstant halten, also in unserem Modell weiterhin zwischen ›heute‹ und ›morgen‹ unterscheiden. Wir lassen aber nun zu, dass zwei Mal gehandelt wird.

Dieses Spiel können wir natürlich weitertreiben und komplexe Bäume aufbauen, wenn wir sehr viele Handelszeitpunkte zulassen, wie es beim heutigen Hochfrequenzhandel in der Realität der Fall ist. Dann sieht das Bild unserer Welt zum Beispiel aus wie in Abbildung 3. Dieses sogenannte Binomialmodell bildet die Basis der Rechenmodelle der Banken.

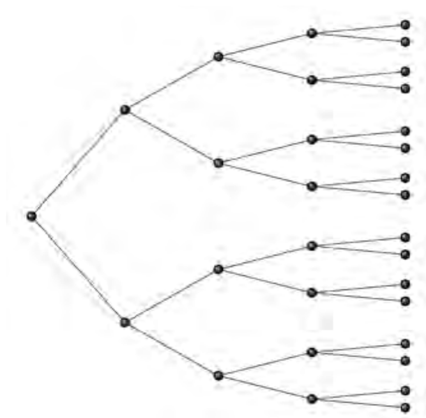

Abbildung 3: Komplexe Unsicherheiten aus dem Atom zusammensetzen. Der Ereignisbaum für vier Perioden.

Eine einfache Art, in diesem Modell einen Aktienkurs zu simulieren, besteht darin, zufällig in einem Zickzackkurs durch diesen Baum zu laufen. Sie können dies selbst einmal mit einem Würfel durchspielen. Wenn Sie eine Vier, eine Fünf oder eine Sechs würfeln, gehen Sie nach oben, ansonsten nach unten. Dies ist ein sinnvolles Experiment, um ein Gefühl für den Zufall zu bekommen. Man spricht dann von einer ›Irrfahrt‹ (englisch *random walk*), weil man eben zufällig durch den Baum irrt.

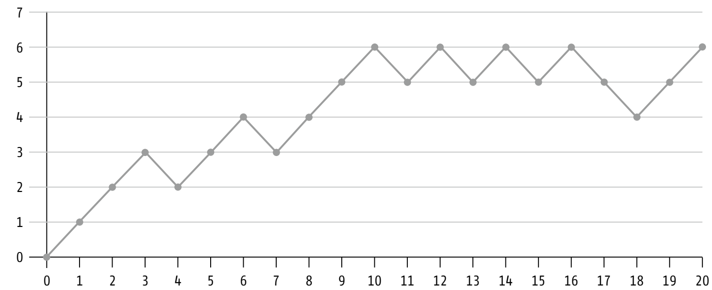

Abbildung 4: Eine Irrfahrt für zwanzig Perioden.

Abbildung 5: Eine Brownsche Bewegung, das Standardmodell der Finanzmathematik.

Wenn wir nun das Zeitintervall zwischen zwei Handelszeitpunkten immer kleiner werden lassen und richtig skalieren, können wir auch Kurse modellieren, die so aussehen wie in Abbildung 5 und mehr einem typischen Bild eines Aktienkurses gleichen. Diesen Grenzfall der Irrfahrten nennt man eine BROWNsche Bewegung oder Diffusion. Solche zufälligen Bewegungen tauchen auch in anderen Wissenschaften auf: Wenn Sie etwa einen Tropfen Tinte in Ihr Badewasser geben, können Sie eine solche Bewegung beobachten; viele zufällige Stöße lassen die Tinte langsam, aber zufällig im Wasser diffundieren. In der Tat können hinreichend viele Kurse auf diese Art und Weise sehr gut modelliert werden.

Der Standardfall einer Diffusion ist die nach dem Botaniker ROBERT BROWN benannte Bewegung. Wie so oft bei großen Entdeckungen lag hier zu Anfang ein Irrtum vor: BROWN beobachtete 1827, wie Pollen in einem Wassertropfen hin- und herzuckten. Er interpretierte das als ein Zeichen für den Lebenswillen dieser Pollen – eine schöne, der Romantik dieser Zeit entsprechende, aber leider falsche Vermutung. Die zitternde Bewegung der Pollen rührte von den unzähligen Stößen der vielen kleinen Wassermoleküle her, die in unregelmäßiger Folge von allen Seiten auf die Pollen treffen. In Analogie dazu können wir sagen, dass unser Baummodell das Einprasseln einer Unmenge verschiedener kleiner Informationen auf den Aktienwert einer Firma beschreibt – im Grunde gar kein schlechtes Bild, für den Anfang.

Die BROWNsche Bewegung und Diffusionen allgemein bilden viele zufällige Phänomene ab, aber bei Weitem nicht alle. Man bekommt nämlich, wie Sie anhand des Bildes sehen, Kurse, die zwar wahnsinnig zittern, die aber niemals springen. Große Kurssprünge können wir also mit unserem Modell nicht erfassen. Wir halten also fest: Das Grundmodell der Aktienkurse erlaubt es, diese in normalen Zeiten zu verstehen und zu analysieren, wenn keine großen Sprünge auftauchen und man in erster Näherung davon ausgehen kann, dass die Kurse einer BROWNschen Bewegung entsprechen.

Es würde hier zu weit führen, die wissenschaftliche Literatur Revue passieren zu lassen, die schon früh, eigentlich seit den sechziger und siebziger Jahren des letzten Jahrhunderts, die Verwendung der BROWNschen Bewegung kritisiert hat. Ein berühmter Kritiker ist etwa der Erfinder der Fraktale und Apfelmännchen, BENOÎT MANDELBROT. Er hat schon früh darauf hingewiesen, dass wichtige Aspekte realer Aktienkurse durch die BROWNsche Bewegung nicht gut beschrieben werden. So gibt es große Ausschläge eben häufiger als es bei einer Diffusion der Fall ist. Im Grunde haben die Kritiker seit jeher zum Teil recht: es gibt wirklich relativ große Sprünge, die immer wieder auftauchen können. Nichtsdestotrotz ist als Grundmodell die BROWNsche Bewegung meiner Ansicht nach zu Recht der Standard der Finanzmarkttheorie geblieben; nicht, weil sie in jedem Fall das beste und realitätsnaheste Modell darstellte, sondern weil sie gewissermaßen den NEWTONschen Fall eines reinen und einfachen Modells darstellt, auf dem man alles andere aufbauen kann. Jeder, der das Grundmodell verwendet, sollte sich jedoch der Grenzen des Modells bewusst sein. Ein guter Ingenieur sollte eben wissen, wann er auf die NEWTONsche Mechnik zurückgreifen kann und wann er komplexere und moderne Physik benötigt.

Aus dem einfachen Atom können wir sehr komplexe wahrscheinlichkeitstheoretische Modelle bauen, die viele Eigenschaften von Aktienkursen erfassen. Den heutigen Punkt oder Zustand kennen wir ja; dies ist der heutige Tag, an dem wir den Aktienpreis beobachten. Sagen wir, unsere Aktie kostet heute 100 Euro. Im Atommodell gibt es morgen zwei Zustände, *up* und *down*. In Anlehnung an die Namen und das Bild nehmen wir an, dass die Aktie gestiegen ist, wenn der Zustand *up* eintritt, und dass sie ansonsten gefallen ist. Sie kann morgen entweder auf 105 Euro steigen oder auf 95 Euro fallen, wie Abbildung 6 zeigt.

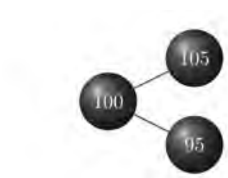

Abbildung 6: Das atomare Aktienmodell.

Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass wir uns Geld für null Prozent Zinsen leihen können. Nun betrachten wir eine Wette auf den Aktienkurs, die wir in Anlehnung an die Sprache der Aktienmärkte *Digital Call* nennen – solche Produkte werden wirklich gehandelt. Wenn der Aktienkurs steigt, erhalten Sie zehn Euro, wenn er fällt, erhalten Sie nichts. Man erhält also ›zehn Euro oder nichts‹, was das englische *digital* im Namen erklärt, wobei *digital* eigentlich für ›1 oder 0‹ steht. Wir brauchen uns aber gar nicht für die blumigen Namen der Produkte zu interessieren, die den Geist nur unnötig vernebeln. Wichtig ist, dass die Auszahlung der Wette vom zukünftigen Aktienkurs abhängt. Man spricht hier von einem Derivat (von lateinisch *derivare*, ableiten), weil die Auszahlung der Wette davon abhängt, welchen Wert die zugrunde liegende Aktie hat.

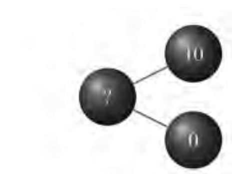

Abbildung 7: Auszahlung des *Digital Call*.

Wie viel würden Sie heute für den *Digital Call* zahlen? Normalerweise würde man denken, dass die Antwort auf diese Frage von Ihrer persönlichen Wettneigung abhängt oder Ihrer Angst vor Risiko;

eventuell würden Sie mich nach den Wahrscheinlichkeiten fragen, dass der Kurs steigt, oder Sie würden mir einfach ›aus dem Bauch heraus‹ eine Zahl nennen, die Ihnen passend erscheint. Die Ökonomen gehen davon aus, dass Angebot und Nachfrage einen Preis für die Wette bestimmen. Je nach Angebot und Nachfrage wären dann viele verschiedene Preise für den *Digital Call* möglich. Das ist aber falsch. Es gibt genau einen richtigen Preis für die Wette, und er beträgt fünf Euro. Erstaunt? Das wollen wir doch hoffen. Bei erstem Anschein ist es nicht unbedingt offensichtlich, dass der Preis festliegt und genau fünf Euro beträgt.

Der eindeutige Preis ergibt sich nämlich aus dem Prinzip der Arbitragefreiheit. Im Grunde zeigt man dies durch eine ähnliche Rechnung wie bei unserem einfachen Äpfel-und-Birnen-Beispiel. Der *Digital Call* ist nämlich nichts anderes als eine Kombination aus Aktien und Anleihen, die man für einen festen Preis kaufen kann. Dieser feste Preis beträgt hier fünf Euro.

Lassen Sie uns überlegen, wie das geht. Mit fünf Euro können Sie Folgendes tun: Sie leihen sich 95 Euro, dann haben Sie 100 Euro in der Hand, und auf ihrem Konto steht ein Betrag von minus 95 Euro. Von diesen 100 Euro kaufen Sie sich eine Aktie. Gut; damit haben wir ein kleines Portefeuille zusammengestellt, das aus einer Aktie und 95 Euro Schulden besteht.

Nun bestimmen wir den Wert des Portefeuilles im nächsten Zustand. Wenn der Zustand *up* eintritt, so ist die Aktie 105 Euro wert, und Sie haben weiterhin 95 Euro Schulden, die Sie zurückzahlen müssen. Insgesamt behalten Sie also 10 Euro. Wenn der Zustand *down* eintritt, verkaufen Sie die Aktie für 95 Euro und begleichen damit Ihre Schulden von 95 Euro; es bleiben also netto null Euro.

Abbildung 8: Das Portefeuille, das den *Digital Call* perfekt nachbildet (dupliziert).

Wir haben genau den *Digital Call* nachgebildet! Im ›günstigen‹ Zustand erzielen wir zehn Euro, im ungünstigen gerade null Euro, genau wie das Derivat. Die Wette *Digital Call* ist daher nichts anderes als ein Portefeuille aus einer Aktie und minus 95 Euro Bargeld. Das Portefeuille kann man für fünf Euro erwerben. Für fünf Euro können wir also das Derivat perfekt nachbilden – eine perfekte Absicherung (*perfect hedge*) in der Sprache der Trader –, daher beträgt der einzig mögliche Preis für den *Digital Call* fünf Euro.

Was hat unser obiges Argument mit dem Prinzip der Arbitragefreiheit zu tun? Wenn irgendjemand für den *Digital Call* sechs Euro bezahlt, können Sie einen Gewinn ohne Risiko einstreichen: Sie verkaufen den *Digital Call* für sechs Euro und kaufen für fünf Euro das Portefeuille aus einer Aktie und minus 95 Euro Bargeld – Sie machen somit heute schon einen Gewinn von einem Euro. Kann Ihnen morgen etwas passieren? Nein, denn Sie sind völlig abgesichert. Wenn der Zustand *up* eintritt, müssen Sie zehn Euro zahlen. Dies ist aber genau der Wert Ihrer Portefeuilles, das Sie verkaufen. Wenn der Zustand *down* eintritt, müssen Sie nichts zahlen, und auch Ihr Portefeuille können Sie ohne Kosten liquidieren, da es dann ja genau den Wert null hat.

Das und, ich möchte sagen, nur das, ist gute Finanzmathematik. Kurz gesagt, macht sie Folgendes:

- Sie analysiert ein zukünftiges Risiko, eine unsichere Auszahlung, die von dem Wert einer Aktie oder Anleihe abhängt.
- Sie bestimmt mit Hilfe des Prinzips der Arbitragefreiheit einen eindeutigen Preis.
- Sie liefert zugleich das Rezept, wie man sich mit Hilfe eines Portefeuilles perfekt gegen das Risiko absichern kann.

Die Finanzmathematik rechnet also rückwärts, nicht vorwärts. Sie untersucht, wie man sich gegen ein zukünftiges Risiko perfekt absichern kann. Und sie gibt sowohl ein Rezept für diese Absicherung an wie auch den Preis dieses Rezeptes. *Gute Finanzmathematik ist Versicherungsmathematik*.

Die Optimierer: Tricksen und Spekulieren mit Finanzmathematik

So, wie ich die eigentliche und gesellschaftlich im Übrigen enorm nützliche Form der Finanzmathematik als eine Form der Versicherungsmathematik geschildert habe, mag sie recht harmlos und in gewisser Hinsicht ›langweilig‹, mathematisch trocken erscheinen. Wie kann sie dann so gefährlich werden?

Wir dürfen nicht vergessen, dass wir mit der obigen Methode in der Lage sind, *alle* beliebigen Arten von ›zustandsabhängigen Zahlungen‹ der Zukunft zu bewerten und durch eine Handelsstrategie zu erzeugen. Im Prinzip können Sie mir eine beliebige Wette, deren Auszahlung vom Kurs des DAX etwa abhängt, geben, und ich sage Ihnen, wie viel Sie dafür investieren müssen und mit welcher Handelsstrategie Sie genau diese Auszahlung erhalten.

Dies eröffnet eine ganz neue Welt, wie es bahnbrechende wissenschaftliche Entdeckungen häufig tun. Im Baummodell kann jede Wette, die eine Funktion des Aktienkurses ist, eindeutig bewertet werden.

Als ich einmal den beeindruckenden Trading-Floor einer großen Investmentbank besichtigte, zeigte man mir stolz einen abgetrennten Bereich, in dem »unsere Optimierer« saßen. Ich fragte mich naiv, wie man als Professor nun einmal sein kann, was es denn zu optimieren gäbe. Die Antwort lautete, dass »diese Jungs« die letzte Rendite aus den Produkten herausquetschen würden. Es hat eine Weile gedauert, bis ich endlich verstand, dass es sich um ›Wetten-Erfinder‹ handelte: Da man jede Wette bewerten und absichern kann, gibt es einen breiten Spielraum für die Erfindung von exotisch klingenden und attraktiv scheinenden Wetten, die sich mit dem entsprechenden Marketing gut verkaufen lassen.

Ein typischer Marketingtrick geht zum Beispiel so: »Gewinne mit fallenden oder stagnierenden Kursen!« Das klingt zunächst einmal überraschend für den klassischen Anleger, der es gewohnt ist, eine Aktie oder Fonds zu kaufen, und dann auf steigende Kurse hofft. Jetzt kann man auch mit fallenden Kursen gewinnen? Nun ja: Die Bank hat mit Hilfe der Finanzmathematik gelernt, wie man jede Wette bewertet und absichert. Jetzt kann sie folgende Auszahlung anbieten: Der Kunde erhält 100 Euro, wenn der DAX sich im folgenden Monat nicht um mehr als 100 Punkte ändert, ansonsten erhält der Kunde nichts.

Das Ganze bekommt einen klingenden Namen wir ›Inline-Zertifikat‹ oder, wenn man die Auszahlungsfunktion noch etwas komplizierter gestaltet, ›*Down-and-out-Put*‹ oder ›*Up-and-out-Call*‹ oder noch besser ›*Reverse-Discount*-Plus-Zertifikat‹, wo man aus dem Namen kaum noch die Struktur der Funktion ablesen kann.

Die ›Optimierer‹ in den Banken machen im Prinzip genau das: Sie berechnen, wie viel es die Bank kostet, sich perfekt abzusichern, sagen wir, 50 Cent, und verkaufen den tollen ›Korridorschein‹ dann für einen höheren Preis an den Investor, der bei seitwärts laufenden Kursen unbedingt Rendite machen will. Die Rolle der ›Optimierer‹ in den Banken besteht oft darin, sich gut klingende Wetten auszudenken, ein Modell der Absicherung zu berechnen, und es möglichst gut zu verkaufen.

Das allein ist bedauerlich, aber erlaubt, und es erzeugt nicht automatisch große Finanzkrisen. Aus volkswirtschaftlicher Sicht werden hier trotzdem viel zu viele unnötige Wetten verkauft; andererseits liegt es in der Verantwortung von Investoren, wenn sie solche Wetten eingehen. Aufgrund der Marge der Bank verbleibt ohnehin der größte Teil der Rendite bei der Bank. Nichtsdestotrotz wird die Finanzmathematik gern benutzt, um angeblich lukrative Scheingeschäfte zu erzeugen.

Grenzen der eigentlichen Finanzmathematik

Es ist faszinierend zu sehen, wie stürmisch und rasant sich eine einmal gut begründete und mathematisierte Wissenschaft entwickelt. Dies trifft bei Weitem nicht nur auf die Physik und auf die Finanzmathematik zu, auch die eher klassischen Bereiche der Wirtschaftswissenschaften haben von ihrer Mathematisierung stark profitiert. Mathematik führt eben zu Klarheit und zu der Möglichkeit, hochkomplexe Vorgänge sinnvoll diskutieren zu können, die man mit der normalen Umgangssprache nicht in den Griff bekommt. Aber Mathematik kann auch falsch angewandt und überdehnt werden, insbesondere wenn man sich der Grenzen der Modelle nicht bewusst ist.

Für die Finanzwelt führte die Mathematisierung jedenfalls zu einer spektakulären Entwicklung – in der Wissenschaft und in der Praxis. Nach den Durchbrüchen der späten sechziger und frühen siebziger Jahre vergingen etwa zehn Jahre, bis Mathematiker und Ökonomen geklärt hatten, wie eigentlich die Grundlagen einer mathematisierten Finanzwissenschaft auszusehen hätten. Damit tat sich Anfang der achtziger Jahre eine faszinierende Welt neuer ökonomischer Fragestellungen und Probleme auf, die sich nun lösen ließen und zudem mit faszinierender Mathematik verbunden waren. Auch für mich, der in den neunziger Jahren ernsthaft mit Wissenschaft begann, war klar, dass die besten Fragestellungen für einen Wahrscheinlichkeitstheoretiker, der an der wirklichen Welt interessiert war, in der Finanzwelt zu finden waren. Es entstanden eigene wissenschaftliche Zeitschriften, und schließlich folgte eine eigene große ›Industrie‹ innerhalb der Wissenschaft mit eigenen Lehrstühlen, Master- und Doktorandenprogrammen. Die Forschungsergebnisse schritten und schreiten unaufhaltsam voran. Nach den eigentlichen Grundlagen, die ich oben skizziert habe und mit denen man einfache Optionen auf Aktien bewertet und absichert, wurden immer komplexere Themen erobert: Hierzu gehört etwa die Theorie der Zinsstruktur und ihrer Derivate; Modelle für Einschränkungen an Handelsmöglichkeiten wie das Verbot von Leerverkäufen wurden entwickelt, man kann Transaktionskosten einführen, es gibt Modelle zu Insider-Informationen, Modelle für Währungsderivate, und schließlich entstanden auch Modelle für Kreditrisiken. Vor lauter Begeisterung über die Erfolge der Theorie in Kombination mit der Schönheit der involvierten Mathematik wurden aber die grundlegenden Grenzen der Finanzmathematik von Teilen der Wissenschaft und der Investmentwelt immer mehr ignoriert und schließlich vergessen.

Wir wollen uns jetzt den Grenzen und Fehlentwicklungen zuwenden. Beide Themen haben sehr viel mit den Kreditrisiken zu tun, die später eine solch unrühmliche Rolle spielten und auf die man die Formeln der Finanzmathematik nicht unreflektiert und unverantwortlich hätte anwenden dürfen.

Grenzen des Baummodells: Diffusionen und Sprünge

Unser erstes Thema hat mit den Grenzen unseres Baummodells und des zeitstetigen Grenzfalls, der Brownschen Bewegung zu tun.

Ich habe im letzten Kapitel schon die natürlichen Grenzen eines solchen Modells angedeutet, nun wollen wir ein wenig mehr ins Detail gehen. Zwischen die beiden Zeitpunkte heute und morgen haben wir nun viele weitere Zeitpunkte gesetzt, in denen man sich entweder nach oben oder nach unten bewegen kann. In unserem ersten Atom wurden die Preisbewegungen so modelliert, dass der Kurs um fünf Euro steigen oder fallen kann. Nun führen wir weitere Verzweigungen ein, so dass nicht nur zwei, sondern vier, acht, 16 *et cetera* Ereignisse möglich sind. Insgesamt wollen wir aber bei demselben Preisbereich für unsere Aktie bleiben, das heißt: Zwischen heute und morgen soll sich der Preis nur zwischen 95 und 105 Euro bewegen können. Als Konsequenz daraus müssen wir die Preissprünge, die sich bei jedem einzelnen *up* oder *down* ergeben, entsprechend skalieren. Die einzelnen Preisbewegungen, die ich in jeder Verzweigung zulasse, müssen also immer kleiner werden. Wir nähern uns damit der Wirklichkeit durchaus an, in der sich die einzelnen Aktienkurse ja auch in ›Ticks‹, also kleinen Minimaländerungen bewegen.

Wenn wir die Schrittgröße sehr klein werden lassen und zufällig durch den Baum laufen, erhalten wir die schon bekannte Form einer BROWNschen Bewegung oder Diffusion. Wie gesagt, kommen große Sprünge in diesem Modell nicht vor. Der komplette Ausfall einer Aktie, also eben ein Kreditereignis, kann so nicht modelliert werden. Das Basismodell der Finanzmärkte erfasst nur, wie man sagt, stetige Preise; außergewöhnliche Sprünge oder sehr seltene Ereignisse mit großen Auswirkungen, die berühmt gewordenen ›schwarzen Schwäne‹ etwa, treten nicht auf.

In der Wirklichkeit muss sich aber der Aktienkurs bei jeder einzelnen Bewegung nicht an das minimale Inkrement halten; er kann plötzlich um einen relativ großen Betrag springen. In unserem Modell ist das zunächst nicht möglich. Der Aktienkurs muss viele kleine Aufwärtsbewegungen vollziehen, um einen großen Kurssprung nachzuvollziehen. Eine wichtige Konsequenz ist also, dass unser Baummodell nicht mehr plötzliche große Sprünge erfassen kann.

Wir halten fest: Unser Basismodell, in dem die Bewertung und Absicherung von Risiken so gut funktionieren, modelliert nur Aktienkurse, die sich aus vielen sehr kleinen Bewegungen ohne plötzliche Sprünge zusammensetzen, also aus Diffusionen. *Finanzmathematik funktioniert gut, wenn die Kurse durch Diffusionen modelliert werden können.*

Nun können Sie einwenden, dass unser ›Atom‹ vielleicht arg einfach gewählt war und wir eben komplexere ›Moleküle‹, um im Bild zu bleiben, betrachten sollten. Mathematisch sollte das doch möglich sein: Man kann etwa noch eine weitere Abzweigung bei unserem Atom hinzufügen, bei dem sich auch nach Skalierung der Preis nicht wenig, sondern stark ändert, und so etwas sollte doch im Prinzip einen Sprung modellieren können.

In der Tat ist die Mathematik solcher Diffusionssprungprozesse oder, allgemeiner noch, beliebiger zufälliger Prozesse, die sich in vernünftiger Form durch Algorithmen beschreiben lassen, gut erforscht, und natürlich haben wir Wissenschaftler uns angeschaut, ob und wie man auch dann noch Finanzmathematik betreiben kann. Man kann, und es ist und war extrem wichtig, sich die erweiterten Modelle anzuschauen, um eben die Grenzen und Möglichkeiten der Finanzmathematik auszuloten. Die Mathematik – dies lohnt sich an dieser Stelle einmal festzuhalten – ist dann auch immer klar und nüchtern und erlaubt es uns gerade, die Strukturen der Risiken in großer Tiefe zu verstehen.

Das Problem besteht eben darin, dass man die Augen vor den Wahrheiten der Mathematik, zum Teil wissentlich, zum Teil unwissentlich, verschlossen hat. Das Ignorieren der Finanzmathematik durch weite Teile der Gesellschaft ist aber eben auch eine selbst verschuldete Unmündigkeit, um einmal den großen Aufklärer IMMANUEL KANT zu zitieren. Nun müssen wir eben die Kosten für diese Unmündigkeit tragen.

Was sagt uns denn nun die Mathematik zu den Erweiterungen des Modells? Das Ergebnis ist ernüchternd: Wenn man die wesentlichen Resultate beibehalten will, muss man sich auf die einfachen Baummodelle und ihre zugehörigen Grenzfälle, also Diffusionen, beschränken. Denn das Absichern und eindeutige Bewerten von Derivaten funktioniert *nur* im Baummodell.

Da dies ein wichtiger, wenn auch ein wenig technischer Punkt ist, möchte ich versuchen, den wesentlichen Punkt kurz anschaulich dazulegen. Eine simple Möglichkeit, unser Atom zu erweitern, besteht darin, einen weiteren Zustand einzubauen. Dann sähe unser Modell so aus wie in

Abbildung 9. Hier habe ich nun die beiden Möglichkeiten, dass die Aktie um fünf Euro steigt oder sinkt, beibehalten, habe aber einen weiteren »Sprung«-Zustand hinzugefügt, bei dem Preis plötzlich explodiert und auf 195 Euro steigt. Wie gesagt: es geht hier nicht darum, möglichst realistisch zu sein, sondern zu illustrieren, was bei einem solchen komplexeren Modell schief geht.

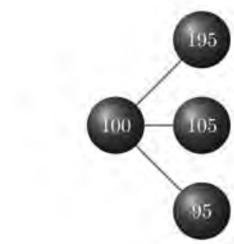

Abbildung 9: Das atomare Aktienmodell mit einem zusätzlichen »Sprung«-Zustand.

Ein Derivat hat nun drei Auszahlungen in den drei Zuständen. Gehen wir zurück zu unserem Beispiel, dem *Digital Call* aus dem letzten Kapitel, der zehn Euro auszahlt, wenn der Aktienkurs steigt. Bei unserem *Digital Call* würden wir auch im neuen Zustand 10 Euro erhalten. Die Auszahlung sähe also so aus, wie Abbildung 10 zeigt.

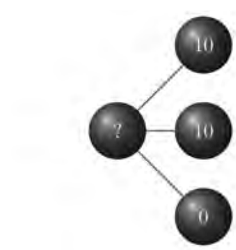

Abbildung 10: Auszahlung des *Digital Calls* im erweiterten Modell.

Nun wollen wir uns gegen dieses Derivat perfekt versichern wie im vorigen Kapitel. Wir suchen also ein Portefeuille aus der Aktie und einem gewissen Geldbetrag, das genau die Auszahlung des *Calls* nachbildet. Wir haben aber nun ein fundamentales Problem: Wir können ja *zwei* Werte frei wählen, eben die Anzahl der Aktien und die Menge Geld. Wir wollen aber in *drei* Zuständen genau einen bestimmten Wert erreichen. Wir kommen also auf drei Gleichungen mit zwei Variablen – und diese hat meistens keine Lösung! Zwei ist kleiner als drei und wird es auch immer bleiben.

Lassen Sie es uns einmal an Hand des Beispiels durchgehen. Wir wissen bereits aus dem vorigen Kapitel, dass wir eine Aktie und minus 95 Euro halten müssen, um die beiden unteren Zustände perfekt abzusichern. Welche Auszahlung würden wir mit diesem Portefeuille aber im dritten Zustand erhalten? Da die Aktie dort 195 Euro wert ist, wäre 195 – 95 = 100 Euro, also viel zu viel. Wir könnten natürlich auch versuchen, die beiden oberen Zustände perfekt abzusichern. Da die Auszahlung in beiden Fällen zehn Euro beträgt, würden wir dann einfach zehn Euro halten. Dann hätten wir aber auch im dritten Zustand die Auszahlung zehn Euro und nicht null. Oder wir sichern den obersten und den untersten Zustand ab, aber Sie ahnen schon, dass auch dies nicht zum gewünschten Ergebnis führen wird.

Hier treffen wir also auf eine fundamentale Grenze unseres Modells. Wenn es in jedem Knoten des Baums mehr als zwei Verzweigungen gibt, ist die perfekte Absicherung von Derivaten nicht mehr möglich. Man sagt, dass der Markt unvollständig ist.

Grenzen des Marktes: Wenn das zugrunde liegende Objekt nicht gehandelt wird

Unser einfaches Absicherungsargument beruht auf der Tatsache, dass das Derivat nichts anderes war als eine Mischung aus der Aktie und Geld. Das Argument beruht natürlich wesentlich auf der Tatsache, dass man sich die Aktie und auch Geld in beliebigen Mengen beschaffen kann. Nun gibt es aber eben auch andere sehr wichtige Märkte, bei denen die Auszahlung des Derivates von Objekten abhängt, die *nicht* gehandelt werden. Ein wichtiges Beispiel sind hier die zinsabhängigen Derivate, die schon viel Unheil angerichtet haben.

Zinsabhängige Derivate kennen viele Leute von ihren eigenen Krediten, auch wenn diese dann nicht so bezeichnet werden. Ein Beispiel sind Kredite mit einer fixen und einer variablen Komponente: Sie zahlen für Ihren Hauskredit stets vier Prozent, außer wenn der kurzfristige Zins auf den Finanzmärkten darüber liegt; dann zahlen Sie diesen höheren Satz. Solche Verträge mit teils flexiblen, teils festen Zinssätzen sind durchaus gängig und beliebt. Technisch heißen diese Verträge zum Beispiel variable Darlehen mit Zinsbegrenzungsgeschäft; gerne wurden auch variable Darlehen kombiniert mit gewissen Zinstauschgeschäften verkauft.

Wenn wir nun unser typisches Absicherungsargument anwenden wollten, um den korrekten Preis des Vertrags zu berechnen, würden wir wieder ein Baummodell formulieren, in dem der Zinssatz in jedem Schritt steigen oder fallen kann. So weit, so gut. Dann würde uns die Theorie sagen, wie viele ›Anteile an Zinsen‹ und *cash* wir halten müssen, um uns perfekt abzusichern. Aber hier stoßen wir auf das Problem, das wir einen Zins nicht kaufen können. Der Wert unseres Vertrages hängt von einer zufälligen Größe ab, die wir nicht direkt handeln können. Im Falle der Zinsen gibt es natürlich oft hinreichend guten Ersatz. So kann man eventuell kurzfristige Anleihen als Annäherung verwenden. Es gibt aber auch andere Ereignisse, auf die die Finanzmarkttheorie ausgedehnt wurde, bei denen das zugrunde liegende Objekt aber keine liquide handelbare Aktie ist. Das bekannteste Beispiel der Finanzmarktkrise sind Kreditereignisse. Ich kann beispielsweise eine Wette auf die Pleite von IBM oder Griechenland oder auch eine Versicherung gegen diesen Ausfall – die berüchtigten *credit default swaps* – beschreiben. Da dieses Ereignis ›Zahlungsausfall Griechenland‹ selbst aber keine handelbare Aktie ist, läuft unser obiges Absicherungsargument nicht mehr. Hier stößt die Finanzmathematik an natürliche Grenzen: Derivate, deren Auszahlung von nicht gehandelten Werten abhängt, können nicht eindeutig bewertet werden. Man kann keine eindeutige Absicherungsstrategie für solche Derivate angeben.

Liquidität und Transaktionskosten, also ›Reibung‹, wenn man eine physikalische Analogie verwenden will, sind ein weiteres grundlegendes Problem. In unserem Baummodell müssen Sie in jedem Knoten das Portefeuille wieder leicht anpassen, theoretisch jedenfalls. Das erfordert aber einen liquiden Markt: Die benötigte Menge an Aktien muss stets auf dem Markt handelbar sein. Wenn Sie selbst relativ kleine Mengen einer liquiden Aktie handeln, wird dies kein Problem sein. Sie werden es aber spüren, wenn Sie auf einem Markt mit wenigen Händlern und geringem Angebot unterwegs sind. Stellen Sie sich vor, Sie brauchen für Ihre Absicherungsstrategie tausend Aktien, aber es gibt auf dem Markt überhaupt nur ein paar hundert. Wenn Sie den gesamten Markt aufkaufen wollen, werden die Preise so stark steigen, dass unser Modell nicht mehr korrekt ist. Wir gingen bisher davon aus, dass unser Handeln keinen Einfluss auf die Marktpreise hat. Wenn wir aber alles aufkaufen, was überhaupt dort ist, beeinflussen wir den Markt mehr, als uns selbst lieb ist: Auf einmal bekommen wir die Aktie gar nicht mehr für die 100 Euro, die wir in unserer Rechnung unterstellt haben, sondern müssen viel mehr für sie zahlen, weil unsere Handelspartner verstanden haben, dass wir unbedingt diese Aktien haben wollen.

Transaktionskosten machen unsere Absicherungsstrategien nicht gerade leichter: Wenn Sie für jeden Handel eine fixe Summe zahlen müssen, bekommen Sie mit unserem Modell ebenfalls

Probleme, weil Sie ja im Prinzip sehr oft handeln müssen. Die Transaktionskosten fressen dann ihre Absicherungsstrategie. Das Grundargument der Finanzmathematik gilt daher nur für Institutionen, die relativ reibungslosen Zugang zu gut funktionierenden liquiden Märkten haben. Dies ist gerade eine der wichtigsten volkswirtschaftlichen Rollen solcher Institutionen: Sie stellen uns Normalbürgern finanzielle Dienstleistungen bereit, die wir nicht selbst leisten können oder wollen oder zu denen uns Erfahrung und Zeit fehlen.

Grenzen der Wissenschaft: Modellunsicherheit

Wir haben einige sehr konkrete Grenzen der eigentlichen Finanzmathematik kennengelernt. Die Finanzmathematik berechnet nur dann den genauen Wert eines beliebigen Risikos und liefert eine genaue Beschreibung, wie man sich gegen dieses Risiko perfekt absichert, wenn das zu Grunde liegende Risiko beliebig handelbar ist und sein Wert sich durch eine Diffusion beschreiben lässt. Wenn Preise springen oder wenn das Risiko von Ereignissen abhängt, die selbst nicht gehandelt werden, befinden wir uns jenseits der natürlichen Grenzen der eigentlichen Finanzmathematik.

Wir können und wollen diesen letzten Punkt weitertreiben und ins Prinzipielle und Grundsätzliche gehen. Üblicherweise schrecken eher mathematisch-technisch geprägte Wissenschaftler vor solchen Ausflügen zurück, weil sie sich vor den möglicherweise frucht- wie endlosen Diskussionen fürchten, die solche philosophischen Grundsatzfragen manchmal hervorrufen. Zuweilen ist es aber notwendig, in eine Phase der Selbstreflektion einzutreten, wenn man nicht wie Max Frischs Homo Faber von der Wucht des Schicksals überrollt werden möchte. Wir wollen uns also einmal fragen: Was tun wir hier eigentlich gerade?

Offensichtlich wenden wir ein mathematisches Modell auf die Wirklichkeit an – und zwar auf eine ganz besondere, vom Menschen selbst geschaffene Wirklichkeit: der Welt des Handels mit Risiken und Chancen, der Welt der Aktienanteile und Wandelanleihen, der Welt der Börsen und Investmentbanken. Können mathematische Modelle diese Welt beschreiben? Diese Frage scheint gerade im Bereich menschlichen Verhaltens sehr berechtigt. Menschen sind schließlich keine Computer und auch nicht vollkommen naturgesetzlich determiniert, so dass eine mathematische Beschreibung von Preisen und Handelsaktivitäten durchaus fragwürdig erscheinen mag.

Im Zuge der jetzigen Grundlagenkrise der Wirtschaftswissenschaften tauchen natürlich allerlei Kritiker der angeblich übertriebenen Mathematisierung auf, die einer anderen Wirtschaftstheorie das Wort reden. Eine Reflektion der Rolle der Mathematik in den Gesellschaftswissenschaften halte ich für höchst wichtig und angebracht; insbesondere müssen wir uns über die grundlegenden Annahmen und das Menschenbild der Volkswirtschaftslehre verständigen, was hier nicht der rechte Ort ist. Ohne Mathematik wird man dieser Aufgabe jedoch nicht gewachsen sein.

In der Anwendung der Mathematik auf die Finanzmärkte treffen wir auf das grundlegende Problem der *Modellunsicherheit*. Da wir in den Gesellschaftswissenschaften unsere Modelle nicht so genau im Labor testen können, wie dies in der Physik möglich ist, müssen wir uns stets der Grenzen der Modelle bewusst sein. Ich kenne Sozialwissenschaftler und Philosophen, denen schon das Hinschreiben eines mathematischen Modells ein Gräuel ist. Es ist auch richtig: Wenn man schon ein Modell hinschreibt, blendet man notwendigerweise viele Faktoren aus. Das muss aber so sein, wenn wir erfolgreich Wissenschaft betreiben wollen. So wie es keinen Sinn ergibt, die psychischen Probleme von Experimentatoren mit der Frage nach Interferenzen des Lichtes zu vermischen, weil man dann weder das eine noch das andere versteht, so ist es sehr wohl sinnvoll, bei der Frage nach dem Wert von Derivaten zunächst einmal andere Aspekte auszublenden. Wir haben ja zum Beispiel angenommen, dass der Preis der zugrunde liegenden Aktie gegeben ist, aber man könnte auch wissen wollen, woher ein solcher Preis überhaupt kommt. Oder wir haben die einzelnen Investmentbanken oder auch den privaten Sparer nicht im Modell (und wollen es auch gar nicht). Modellbildung bedeutet also immer, dass man einen konkreten Aspekt der Wirklichkeit herausarbeitet und formal erfasst.

Wenn ein Modell gut gewählt ist, sind die Fehler, die wir in der Anwendung erhalten, weil wir gewisse Aspekte der Wirklichkeit ausgeblendet haben, hinreichend klein. So ist unser Diffusionsmodell zwar keine perfekte Beschreibung der Wirklichkeit, denn hierzu müssten wir im Labor einen Finanzmarkt erzeugen und kontrollieren, bei dem sichergestellt ist, dass der Preis durch eine Vielzahl unabhängiger kleiner Informationen getrieben wird. Wenn wir damit in die nicht kontrollierte Wirklichkeit gehen, werden wir immer einen gewissen Fehler machen. Für einfache Derivate auf liquiden Märkten, bei denen unsere Aktionen nicht den Preis beeinflussen (auch unsere Aktion ist nichts anderes als eine klitzekleine Information), erhalten wir hinreichend gute Ergebnisse. Man kann unsere Theorie dann erfolgreich anwenden, ohne allzu große Verluste durch die Mängel des Modells zu erleiden.

Ein Problem tritt auf, wenn wir die Unsicherheit unserer Modellbildung vergessen. In der Praxis sieht dies dann so aus, dass ein mittelmäßig begabter, aber übermäßig profitorientierter Mensch blind an die Ergebnisse seiner Excel-Tabelle glaubt, die ihm eine trügerische Genauigkeit vorgaukelt, weil der Rechner scheinbar exakt einen Preis bis auf beliebig viele Nachkommastellen berechnet. Leider weiß der Händler nicht, dass schon die dritte Nachkommastelle aufgrund der Ungenauigkeit seines Modells nichts mehr wert ist. Wenn seine Gewinnerwartungen aber genau von dieser dritten Stelle abhängen, wird er leicht irren.

Wenn man wissenschaftlich korrekt und genau arbeitet, würde man versuchen, die Fehler der Modellbildung zu quantifizieren. Das mag schwierig erscheinen und ist es auch, unmöglich ist es aber nicht. Eine Möglichkeit besteht etwa darin, die Modelle an Hand vergangener Daten zu testen und mit statistischen Methoden abzuschätzen. Hierzu muss man aber unterstellen, dass auf den Finanzmärkten vergangene Daten ein gutes Modell für zukünftige Daten sind. Statistik funktioniert nur dann, wenn eine gewisse Gleichförmigkeit vorliegt (man spricht von Stationarität). In vielen Fällen ist es aber einfach falsch, Stationarität, also eine gewisse Ähnlichkeit der Zukunft mit der Vergangenheit zu unterstellen. Wir haben inzwischen hinreichend viele Beispiele für unliebsame Überraschungen erlebt, die uns eigentlich gezeigt haben sollten, dass man in gesellschaftlichen Modellen zumindest in Betracht ziehen sollte, dass keine Stationarität vorliegt.

Auch wenn es mit den vorhandenen Daten nicht möglich ist, die Modellunsicherheit zu quantifizieren, kann man doch rational damit umgehen. Man muss sich eben der Grenzen der Berechenbarkeit bewusst sein und im Zweifel sichere Puffer einbauen. Es gibt hier, wie mir scheint, durchaus sinnvolle Ansätze, die zum Teil schon einige Zeit bekannt sind, aber in der Banken- und Händlerpraxis bislang nicht umgesetzt wurden. Die Idee ist hierbei, die Modelle *robust* gegen ihre eigene Unzulänglichkeit zu machen. Dies scheint mir der beste Weg zu sein, die Finanzmärkte dauerhaft zu beruhigen und Käufer wie Händler zu einem sinnvollen Umgang mit den Werkzeugen der Mathematik zurückzuführen. Wie dies aussehen kann, war ein zentrales Thema unserer Forschungsgruppe am ZiF, über die wir an anderer Stelle berichten werden.