Klausur Nr.1: Aussagenlogik

Musterlösung

(1) Zeigen Sie mit Hilfe der Wahrheitstafelmethode, dass

a) der Satz in AL „$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$“ eine Kontradiktion ist (7 Punkte);

p	q	$(p$	$\wedge$	$\neg q)$	$\vee$	$(\neg p$	$\wedge$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(p \leftrightarrow q)$
W	W	W	F	F	F	F	F	W	F	W
W	F	W	W	W	W	F	F	F	F	F
F	W	F	F	F	W	W	W	W	F	F
F	F	F	F	W	F	W	F	F	F	W

b) die Sätze „$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$“ und „$p \wedge (q \vee r)$“ logisch äquivalent sind (6 Punkte).

p	q	r	$(p \wedge q)$	$\vee$	$(p \wedge r)$	$\leftrightarrow$	p	$\wedge$	$(q \vee r)$
W	W	W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	W	F	W	W	W	W
W	F	W	F	W	W	W	W	W	W
W	F	F	F	F	F	W	W	F	F
F	W	W	F	F	F	W	F	F	W
F	W	F	F	F	F	W	F	F	W
F	F	W	F	F	F	W	F	F	W
F	F	F	F	F	F	W	F	F	F

Bewertung: Es gibt einen Punkt für jedes richtig ausgewertete Zeichen.

(2) Man kann mit der Wahrheitstafelmethode von einem Satz in AL zeigen, dass es sich bei ihm um eine Kontradiktion handelt. Erläutern Sie, wie dabei vorzugehen ist und welche Idee dieser Vorgehensweise zugrunde liegt. (3 Punkte)

Um mittels der Wahrheitstafelmethode zu zeigen, dass ein Satz A in AL eine Kontradiktion ist, muss gezeigt werden, dass der Wahrheitswertverlauf des betreffenden Satzes in der Wahrheitstafel nur den Wahrheitswert F enthält.

Diesem Verfahren liegt folgende Idee zugrunde:

Nach der Definition des Begriffes der Kontradiktion ist ein Satz von AL genau dann eine Kontradiktion, wenn er bzgl. jeder Bewertung falsch ist. Dass diese Bedingung erfüllt ist, lässt sich aus folgendem Grund mittels der Wahrheitstafelmethode zeigen: Ein Satz in AL enthält nur endlich viele Satzbuchstaben, und deshalb zerfällt die Menge aller Bewertungen in eine ebenfalls endliche Anzahl von Teilmengen – je nachdem, welche Wahrheitswerte die in dem betreffenden Satz vorkommenden Satzbuchstaben bzgl. dieser Bewertungen haben. Jede Zeile in einer Wahrheitstafel entspricht einer solchen Teilmenge. Wenn nun gezeigt ist, dass ein Satz in allen Zeilen den Wahrheitswert F besitzt, dann ist gezeigt, dass er bzgl. jeder Bewertungen falsch ist.

Bewertung: Es gibt einen Punkt für die richtige Nennung der Vorgehensweise und zwei Punkte für die richtige Erläuterung der zugrunde liegenden Idee.

Klausur Nr.1: Aussagenlogik

(3) Handelt es sich bei folgendem Satz in AL um eine Tautologie, Kontradiktion oder keines von beidem? Prüfen Sie dies mit Hilfe der Wahrheitsbaummethode.

$$(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge ((q \vee r) \wedge \neg r) \rightarrow (\neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow s)$$

(8 Punkte)

Bei dem Satz „$(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge ((q \vee r) \wedge \neg r) \rightarrow (\neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow s)$“ handelt es sich um eine **Tautologie**:

1.	√	$\neg((\neg p \rightarrow \neg q) \wedge ((q \vee r) \wedge \neg r) \rightarrow (\neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow s))$	**A**
2.	√	$(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge ((q \vee r) \wedge \neg r)$	**(1)**
3.	√	$\neg(\neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow s))$	**(1)**
4.	√	$\neg(\neg p \rightarrow q)$	**(3)**
5.		$\neg s$	**(3)**
6.		$\neg p$	**(4)**
7.		$\neg q$	**(4)**
8.		$\neg p \rightarrow \neg q$	**(2)**
9.	√	$(q \vee r) \wedge \neg r$	**(2)**
10.	√	$q \vee r$	**(9)**
11.		$\neg r$	**(9)**
12.		q **X**	
13.		r **X**	**(10)**

Bewertung: Je einen Punkt für die richtige Antwort „Tautologie“ und den richtigen Ansatz, bis zu 6 Punkte für die richtige Entwicklung des Baumes.

(4) Übersetzen Sie die folgenden Sätze möglichst adäquat und strukturreich in die Sprache AL. (Vergessen Sie nicht, die entsprechenden Bewertungen anzugeben.) (8 Punkte)

a) p: Die Situation ist hart.

q: Die Situation ist hoffnungslos.

$p \wedge \neg q$

b) p: Eine Diskette befindet sich im Laufwerk.

q: Eine CD befindet sich im Laufwerk.

r: Der Computer kann von der Festplatte booten.

$r \rightarrow \neg (p \vee q)$ ODER $r \rightarrow \neg p \wedge \neg q$ ODER

$\neg\neg (p \vee q) \rightarrow \neg r$ ODER $\neg (\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r$ ODER

$p \vee q \rightarrow \neg r$

c) An Weihnachten schneit es, es sei denn, man ist in Bielefeld oder in der Karibik.

p: An Weihnachten schneit es.

q: Man ist in Bielefeld.

r: Man ist in der Karibik.

Wörtlich (einschließendes „oder"): $p \leftrightarrow \neg (q \vee r)$

Sinnvolle Interpretation (ausschließendes „oder"): $p \leftrightarrow \neg\neg (q \leftrightarrow r)$

Auch möglich : $\neg (p \leftrightarrow \neg (q \leftrightarrow r))$

d) Wenn die Bayern alle Spiele gewinnen, dann werden sie von allen gehasst, aber wenn sie nicht alle Spiele gewinnen, werden sie von niemandem geliebt.

p: Die Bayern gewinnen alle Spiele.

q: Die Bayern werden von allen gehasst.

r: Die Bayern werden von jemandem geliebt.

$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg r)$

Bewertung: Es gibt jeweils einen Punkt für die richtige Bewertung der Satzbuchstaben und einen Punkt für die richtige Übersetzung.

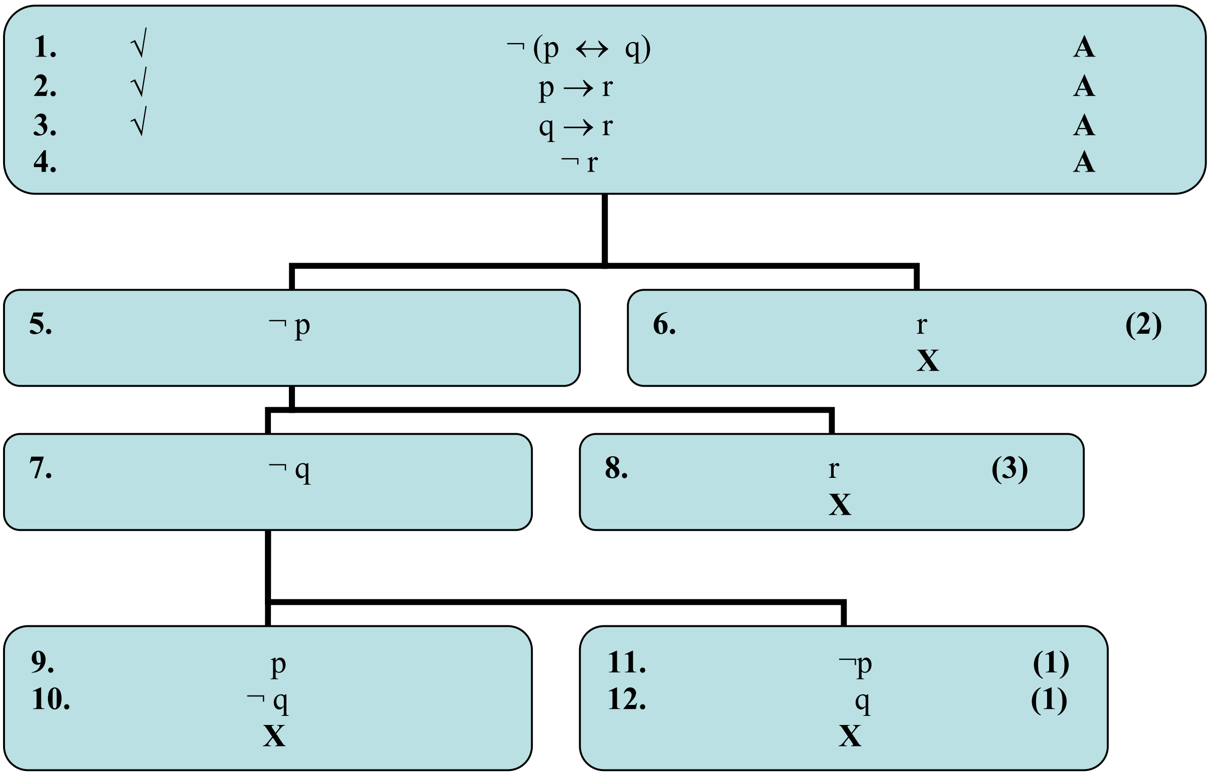
(5) Übersetzen Sie folgendes Argument in AL (Bewertung nicht vergessen!), und überprüfen Sie mit Hilfe des Wahrheits<u>baum</u>verfahrens, ob die Konklusion aussagenlogisch aus den Prämissen folgt:

> Entweder Gott hat den gesamten Lauf der Welt bereits mit der Schöpfung festgelegt oder greift beständig in das Weltgeschehen ein. Wenn Gott den Lauf der Welt bereits festgelegt hat, so ist er an allem schuld. Er ist auch an allem schuld, wenn er beständig in das Weltgeschehen eingreift. Also ist Gott an allem schuld.

(10 Punkte)

p: Gott hat den gesamten Lauf der Welt bereits mit der Schöpfung festgelegt.
q: Gott greift beständig in das Weltgeschehen ein.
r: Gott ist an allem Schuld.

(P1): $\neg (p \leftrightarrow q)$
(P2): $p \rightarrow r$
(P3): $q \rightarrow r$
(K): r



Bewertung: Je 3 Punkte für die angemessene Bewertung und die richtig erkannte logische Form des Argumentes. 1 Punkt für den richtigen Ansatz des Baumes, bis zu 3 Punkte für die richtige Entwicklung.

Klausur Nr.1: Aussagenlogik

(6) Führen Sie den Junktor „$\vee$“ auf die Junktoren „$\neg$“ und „$\wedge$“ zurück. D.h. geben Sie einen Satz von AL an, der nur die Junktoren „$\neg$“ und „$\wedge$“ enthält und zeigen Sie, dass dieser denselben Wahrheitswertverlauf wie der Satz „p $\wedge$ q“ hat. (4 Punkte)

Ein Satz von AL, der den gleichen Wahrheitswertverlauf wie „p $\vee$ q“ besitzt und nur die Junktoren „$\neg$“ und „$\wedge$“ enthält ist z.B. „$\neg$ ($\neg$ p $\wedge$ $\neg$ q)“.

Das kann mithilfe einer Wahrheitstafel gezeigt werden:

p	q	$p \vee q$	$\neg$	$(\neg p$	$\wedge$	$\neg q)$
W	W	**W**	**W**	F	F	F
W	F	**W**	**W**	F	F	W
F	W	**W**	**W**	W	F	F
F	F	**F**	**F**	W	W	W

Bewertung: Es gibt einen Punkt für die Nennung eines passenden Satzes und drei Punkte für den Nachweis, dass dieser den gleichen Wahrheitswertverlauf wie „p $\wedge$ q“ besitzt.