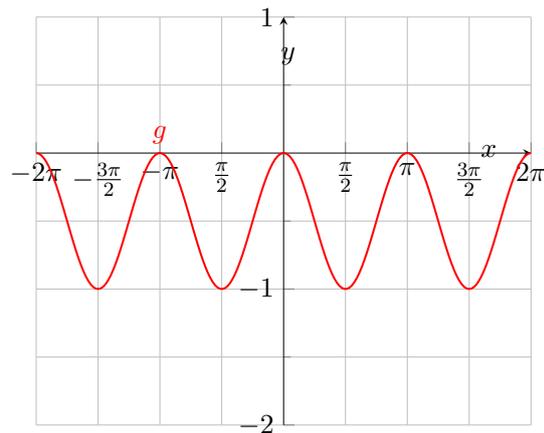
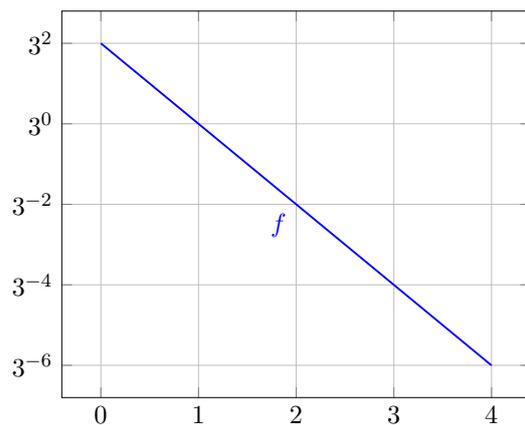


Probeklausur zu *Mathematik für Biologen und Biotechnologen*
vom 05.07.17

Aufgabe XIV.1 (5+5 Punkte)

Geben Sie (ohne Begründung) die Funktionsvorschrift zu den abgebildeten Funktionsgraphen an.



Aufgabe XIV.2 (5+5+5 Punkte)

(a) Berechnen Sie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

(b) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion f mit der Vorschrift

$$f(x) = \ln(3 \sin(x))$$

an.

(c) Bestimmen Sie die Ableitungen f' und f'' von f .

Aufgabe XIV.3 (10+5 Punkte)

In einem See verringert sich die Intensität des Lichts (gemessen in der Einheit Lux [lx]) durch Absorption mit jedem Meter Wassertiefe um 60%. Nehmen Sie an, dass in 2 m Wassertiefe eine Intensität von 2000 lx gemessen wurde.

(a) Bestimmen Sie die Lichtintensität...

- (i) ... auf der Wasseroberfläche,
- (ii) ... in 1 m Wassertiefe,

(iii) ... in 5 m Wassertiefe.

(b) Ab welcher Wassertiefe ist die Lichtintensität geringer als 100 lx?

Aufgabe XIV.4 (5+10 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Entscheiden Sie, ob A invertierbar ist und berechnen Sie gegebenenfalls die Inverse A^{-1} .

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$w'(t) = Aw(t)$$

mit vorgegebenem Anfangswert $w(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe XIV.5 (9+6 Punkte)

Ein Gedenkstein, der die Form eines Rechtecks mit einem aufgesetzten Halbkreis besitzt (vgl. nebenstehende Abbildung), soll errichtet werden.

Der Umfang U des Steins soll $U = 10$ m betragen.

(a) Stellen Sie eine Formel für die vordere Fläche A in Abhängigkeit der Breite a des Rechtecks auf.

Zur Kontrolle: $A = a^2 \left(-\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\right) + 5a$.

(b) Wie groß sind die Breite und die vordere Fläche des Steins, wenn die vordere Fläche maximal groß sein soll?



Aufgabe XIV.6 (5+10 Punkte)

(a) Weisen Sie nach, dass die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = 3y + 1, \\ y(0) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

gegeben ist durch die Funktion

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(x) = e^{3x} - \frac{1}{3}.$$

(b) Bestimmen Sie die Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = x + xy, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Aufgabe XIV.7 (7+8 Punkte)

Sei $a > 0$ eine feste Zahl und $p : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ gegeben durch

$$p(x) = \begin{cases} axe^{-\frac{x}{2}} & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}.$$

- (a) Bestimmen Sie $a > 0$ derart, dass p eine Dichtefunktion ist.
Sollten Sie kein Ergebnis herausbekommen, rechnen Sie mit $a = \frac{1}{4}$ weiter.
- (b) Berechnen Sie den Erwartungswert \bar{X} einer Zufallsgröße X , deren zugehörige Dichte durch p gegeben ist.