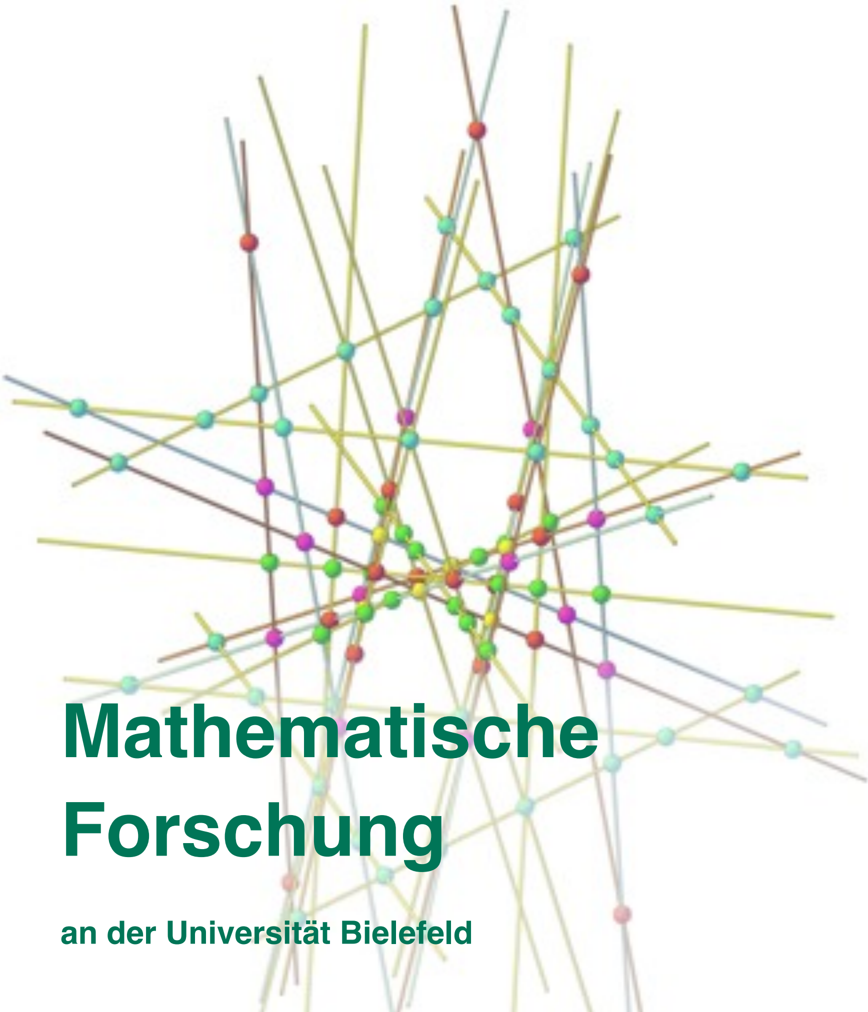


Mathematische Forschung

an der Universität Bielefeld

Eine Broschüre der Fakultät für Mathematik für
Schüler und andere Interessierte

Universität Bielefeld

Das Titelbild zeigt einen CAD-Entwurf des 27-Geraden-Modells, welches im Herbst 2008 auf dem Wissenschaftsfestival GENIALE vorgestellt wurde (vgl. S. 9). Entwurf: F. Kürpig

Hinweis

Im Dienste der Lesbarkeit sind Berufsbezeichnungen, Titel u.ä. in diesem Text durchgängig maskulin gewählt. Dies ist als geschlechtsunabhängige Formulierung zu verstehen; geschlechtsspezifische Aussagen sind ausdrücklich als solche kenntlich gemacht.

Impressum

Autoren der Textbeiträge:
E. Baake, M. Baake, W.J. Beyn, G. Elsner, F. Götze, T. Hüls, C.M. Ringel, M. Röckner, S. Wiesinger.

Autoren der Bilder:
D. Frettlöh, T. Hüls, N. Langohr, B. Quisbrok, S. Wiesinger, P. Zeiner.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Universitätsstraße 25
33615 Bielefeld

Inhalt

Grußwort des Rektors der Universität Bielefeld 4

Mathematische Forschung in Bielefeld 6

SFB 701 – ein Kurzportrait 7

- Woran wird im SFB 701 geforscht? 8
- Die 27 Geraden 9
- Aperiodische Ordnung muss sich beugen! 13
- Statistik von Resonanzfrequenzen 14
- Die Brownsche Bewegung ist überall 15

IGK – ein Kurzportrait 16

- Woran wird im IGK geforscht? 18
- Mathematisches High-Tech für Ökologen 18
- Wie bezahlt man Geldverwalter? 21

FSPM – ein Kurzportrait 23

- Mathematische Populationsgenetik: Ahnenlinien im Moran-Modell 24
- Korngrenzen und Schnittgitter 26
- Das Verhalten von Goldfliegen – aus dem Blickwinkel der Mathematik 27

Erfolgreich international forschen 29

Was bedeutet das jetzt für mich? 31

Grußwort des Rektors der Universität Bielefeld

Ohne Mathematik geht in der modernen Wissensgesellschaft gar nichts – sie hat grundlegende Bedeutung nicht nur für Naturwissenschaften und Technik, sondern spielt auch in den Sozialwissenschaften und selbstverständlich in allen nur denkbaren wirtschaftlichen Zusammenhängen eine wichtige Rolle. Junge Mathematiker haben heute Karrierechancen wie wahrscheinlich nie zuvor.

Vor 40 Jahren war die Fakultät für Mathematik eine der drei Gründungsfakultäten der Universität Bielefeld. Von Beginn an haben hier hervorragende Wissenschaftler geforscht und gelehrt und Bielefeld schnell zu einem international herausragenden Ort der Mathematik gemacht. In wichtigen Rankings wird das immer wieder bestätigt: Die Fakultät gehört laut der Einschätzung des Centrums für Hochschulentwicklung (CHE) zu den Top 20 in Europa, und die Alexander von Humboldt-Stiftung ermittelte, dass die Fakultät die beliebteste in Deutschland für Gastaufenthalte ausländischer Wissenschaftler ist!

Die Broschüre, die Sie gerade in den Händen halten, will Ihnen einen ersten Eindruck von der spannenden mathematischen Forschung an der Universität Bielefeld vermitteln. Deren Spektrum ist traditionell sehr breit. Selbstverständlich ist die Mathematik in erster Linie eine Grundlagenwissenschaft, aber zugleich gibt es in Bielefeld auch sehr handfeste anwendungsbezogene Forschung. Der große von der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanzierte

Sonderforschungsbereich „Spektrale Strukturen und Topologische Methoden in der Mathematik“ z.B. widmet sich in Kooperation von „reinen“ und anwendungsbezogenen Mathematikern u.a. der Rückwirkung physikalischer Theorien auf die Mathematik. Das gemeinsam mit Mathematikern aus Peking betriebene Doktorandenkolleg „Stochastics and Real World Models“ beschäftigt sich vor allem mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Kontext wirtschafts- und naturwissenschaftlicher Modelle und ist zugleich ein Beispiel für die international ausgerichtete Ausbildung von Nachwuchswissenschaftlern auf höchstem Niveau. Der Forschungsschwerpunkt Mathematisierung (FSPM) befasst sich als zentrale wissenschaftliche Einrichtung der Universität mit mathematischer Modellbildung in anderen Wissenschaften.

Als kleine Andeutungen sollen diese Hinweise hier genügen. Ich wünsche Ihnen viel Freude beim Eintauchen in die mathematische Forschung an der Universität Bielefeld!

Dieter Timmermann

Rektor Prof. Dr. Dieter Timmermann

Mathematische Forschung in Bielefeld

Die Fakultät für Mathematik der Universität Bielefeld besteht seit der Gründung der Universität im Jahre 1969. Sie hat ca. 1600 Studierende und etwa 70 wissenschaftliche Mitarbeiter (d.h. Professoren, Dozenten, Assistenten, wissenschaftliche Hilfskräfte etc.; Mitarbeiter auf Projektstellen sind hierbei nicht mitgezählt worden), 16 nichtwissenschaftliche Mitarbeiter und über 90 studentische Hilfskräfte. Der überwiegende Teil der Forschung der Bielefelder Fakultät für Mathematik wird durch drei Säulen getragen, die wir im Folgenden vorstellen möchten.

Anknüpfend an einen früheren Sonderforschungsbereich und eine DFG-Forschergruppe gibt es seit 2005 den Sonderforschungsbereich 701 „Spektrale Strukturen und topologische Methoden in der Mathematik“, der in fast zwanzig Einzelprojekten an den Schnittstellen zwischen verschiedenen Teilgebieten der Mathematik forscht. Die zweite Säule ist das Internationale Graduiertenkolleg (IGK) „Stochastik und Modellierung Realer Systeme“, das seit 2006 Promotionsstudierende bei der Realisierung ihrer ersten Forschungsprojekte unterstützt und ihnen die dafür notwendigen Spezialkenntnisse vermittelt. Die dritte Säule ist der Forschungsschwerpunkt Mathematisierung (FSPM), eine fakultätsübergreifende Forschungseinrichtung, die seit Gründung der Universität Bielefeld ein wesentliches Merkmal ihrer interdisziplinären Ausrichtung ist.

Bevor wir auf den folgenden Seiten zu jeder dieser drei Säulen ein Kurzportrait geben und die Forschung in einigen kleinen Beispielen vorstellen, möchten wir noch betonen, dass auch in anderen Fakultäten und Einrichtungen der Universität Bielefeld mathematisch geprägte Forschung betrieben wird. Besonders zu erwähnen ist hier neben der Fakultät für Physik das Institut für Mathematische Wirtschaftsforschung (IMW), das substanzielle Beiträge sowohl zum FSPM als auch zum IGK leistet.

SFB 701 – ein Kurzportrait

→ **www.math.uni-bielefeld.de/sfb701/**

Ein Sonderforschungsbereich (SFB) ist ein langfristiges Forschungsprojekt, das Wissenschaftler aus mehreren Arbeitsgruppen und Disziplinen für bis zu 12 Jahre unterstützt, um neue Erkenntnisse zu einem eingegrenzten Thema zu gewinnen. Sonderforschungsbereiche werden von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (**www.dfg.de**) finanziell gefördert.

Der SFB 701 „Spektrale Strukturen und topologische Methoden in der Mathematik“ (Sprecher: Prof. Dr. Friedrich Götze) ist einer von vier SFBs in Deutschland mit Schwerpunkt Mathematik. Er wurde im Juli 2005 etabliert und umfasst derzeit 18 Teilprojekte, in denen über 50 Wissenschaftler zusammenarbeiten. Im Jahr 2008 beträgt das Finanzvolumen des SFB 701 ca. 2,3 Mio. Euro.

Woran wird im SFB 701 geforscht?

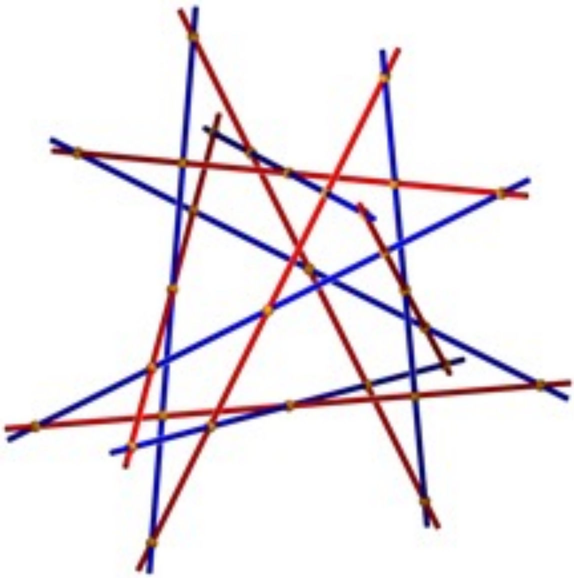
Die Mathematik entwickelt sich sowohl aufgrund der Probleme, die das mathematische Denken selbst aufwirft, als auch angeregt durch Anwendung mathematischer Methoden in Natur und Gesellschaft. Diese beiden Aspekte, die reine und die angewandte Mathematik, bleiben trotz divergierender Tendenzen und rasch wachsender Spezialisierung engstens miteinander verbunden und entwickeln fruchtbare Wechselwirkungen, wenn man sie in neuen Initiativen vereint. Neue Ergebnisse mit dem Potenzial, beide Gebiete zusammenzuführen, sind nicht häufig, haben dafür aber oft weit reichende Wirkungen und ermöglichen fundamental neue Einsichten. Ebenso offenbaren sehr verschiedene Gebiete der Mathematik mit langer Tradition bemerkenswerte inhaltliche wie auch methodische Verbindungen, die im Sonderforschungsbereich untersucht werden sollen: „Spektrale Strukturen“ sind allgegenwärtig in Mathematik und Naturwissenschaften. Mit „topologischen Methoden“ können invariante Eigenschaften von mathematischen Objekten unter Klassen von Deformationen beschrieben werden. In der Mathematik sind beide in der Beschreibung globaler topologischer Invarianten aus spektralen Daten eng miteinander verbunden. Neueste Konzepte der mathematischen Physik haben in jüngster Zeit entscheidenden Einfluss auf die reine Mathematik gehabt. Besonders erwähnenswert sind in diesem Zusammenhang die Seiberg-Witten-Invarianten in der Topologie, der Einsatz spektraler Verteilungen aus der Physik in der Zahlentheorie und die Anwendung von Konzepten aus der Quantenfeldtheorie auf Modulräume der algebraischen Geometrie. Andererseits finden moderne Methoden der reinen Mathematik und insbesondere der Topologie und Zahlentheorie nicht nur Eingang in die theoretische Physik, sondern auch in andere Gebiete der angewandten Mathematik, wie zum Beispiel die Materialwissenschaften, die Kristallographie und die Hydrodynamik. Im Sonderforschungsbereich arbeiten reine und angewandte Mathematiker unterschiedlicher Richtungen im engen Austausch, um das enorme Potenzial gebietsübergreifender Forschung nutzbar zu machen. Hierzu einige Beispiele:

Um die engen Beziehungen zwischen Algebra und Geometrie, die einen Schwerpunkt der Forschung im SFB 701 bilden, zu verdeutlichen, starten wir mit einer klassischen Fragestellung aus dem 19. Jahrhundert.

Die 27 Geraden

Folgende Fragen scheinen auf den ersten Blick ganz harmlos: Gibt es 12 Geraden im Raum, so dass jede Gerade genau 5 andere schneidet? Gibt es 27 Geraden im Raum, so dass jede Gerade genau 10 andere schneidet?

Auf viele derartige Fragen kann die Mathematik bisher keine Antwort geben. Im Fall des oben genannten Zwölfer-Problems ist aber recht einfach zu sehen, dass sogar gilt: Man kann sechs rote und sechs blaue Geraden so im Raum platzieren, dass jede rote Gerade genau fünf blaue schneidet, und jede blaue Gerade genau fünf rote. Dabei schneidet keine Gerade eine andere mit der gleichen Farbe. Eine solche Geraden-Konfiguration heißt Schläf-

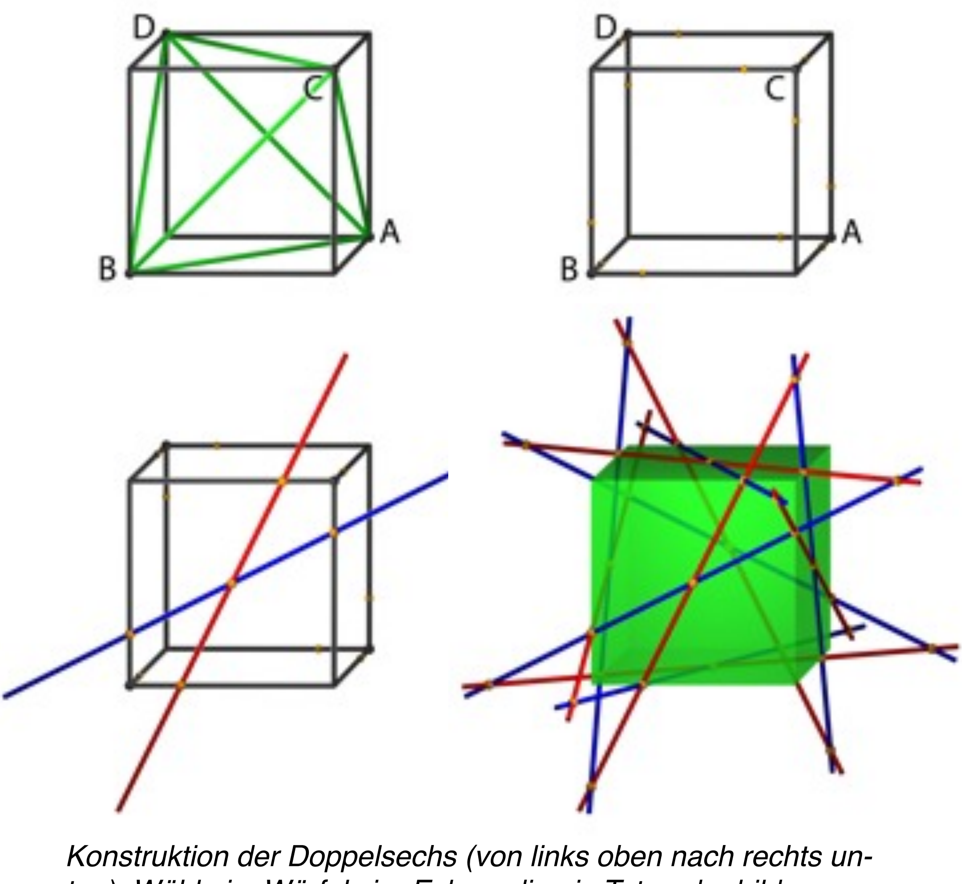


Die Schläfli'sche Doppelsechs

li'sche Doppelsechs. Sie ist nach Ludwig Schläfli (1814-1895) benannt, der diese Geraden-Konfiguration untersucht hat.

Die Konstruktion einer Schläfli'schen Doppelsechs ist nicht schwer, wenn man den Trick kennt: Man beginnt mit einem Würfel mit Kantenlänge 1 und wählt vier Würfel-Ecken A, B, C, D so aus, dass sie zusammen ein Tetraeder bilden. Dann viertelt man die Würfel-Kanten durch je drei Punkten und wählt alle diejenigen Punkte aus, die den Abstand ¼ von den Ecken A, B, C, D haben: man erhält auf diese Weise also 12 Punkte auf dem Würfel. Verbindet man nun auf jeder Würfel-Fläche die jeweils gegenüberliegenden Punkte, so liefert dies pro Würfel-Fläche zwei Geraden (eine färbt man blau, die andere rot), insgesamt also 12 Geraden. Bei der Farb-

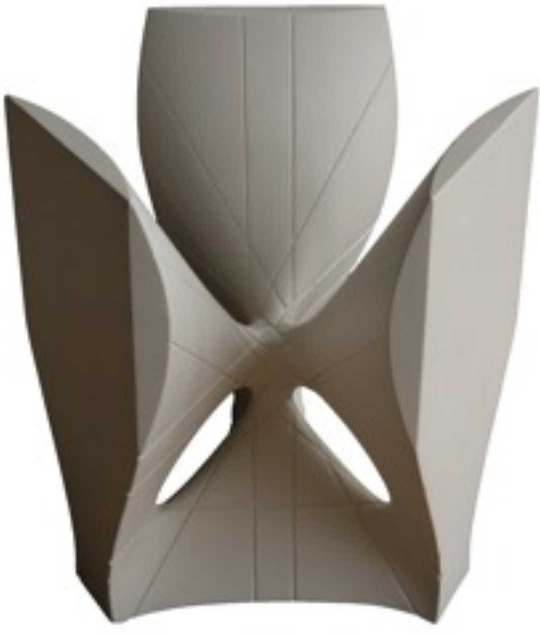
Wahl ist darauf zu achten, dass sich die roten Geraden angrenzender Würfel-Seiten nicht schneiden (dann schneiden sich auch die blauen nicht). Nun kann man sehen, dass jede rote Gerade genau fünf andere Geraden schneidet, die alle blau sind.



Konstruktion der Doppelsechs (von links oben nach rechts unten): Wähle im Würfel vier Ecken, die ein Tetraeder bilden, markiere die benachbarten “Viertelpunkte”, konstruiere rote und blaue Geraden durch die gegenüberliegenden “Viertelpunkte”, so dass am Ende die fertige Doppelsechs steht.

Aber auch das 27-er Problem besitzt eine Lösung:

Die 27 Geraden, die unsere Eingangsfrage beantworten, können auf einer sogenannten kubischen Fläche realisiert werden, nämlich auf der Clebschen Diagonalfläche. Es existieren verschiedene Modelle dieser Fläche, eines wurde als deutscher Beitrag auf der Weltausstellung 1894 in Chicago vorgestellt. Aber erst auf einem in Bielefeld entwickelten Gipsmodell sind die 27 Geraden auch wirklich als Geraden realisiert worden. Ein Modell der Geraden-Konfiguration selbst (ohne die Fläche), an dem man das Schnittverhalten dieser Geraden direkt ablesen kann, ist im Herbst 2008 im Rahmen des Wissenschaftsfestivals GENIALE in Bielefeld vorgestellt worden.



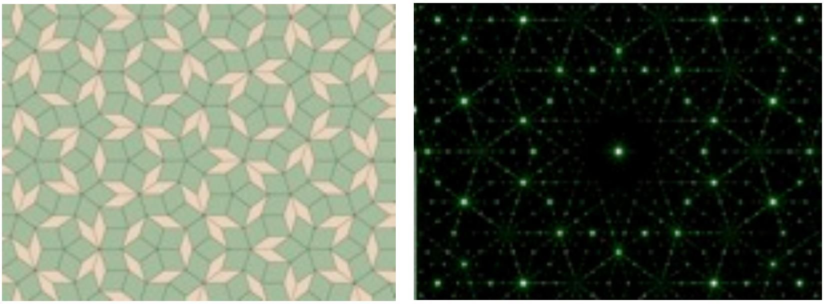
Das Bielefelder Gipsmodell der Clebschen Diagonalfläche

Es gibt einen interessanten Zusammenhang zwischen dem 12-er und dem 27-er Problem: Betrachtet man eine Konfiguration von 27 Geraden, die unsere Eingangsfrage lösen, so gilt: Es gibt genau 36 Teilmengen dieser 27 Geraden, die eine Schläfli'sche Doppelsechs bilden. Die Zahl 36 wiederum steht im Kontext eines wichtigen algebraischen Forschungsthemas, der sogenannten Wurzelsysteme der Lie-Theorie.

Derartige Fragen aus der Algebra, die eng verbunden sind mit Fragen der Geometrie, der Analysis und Differentialgeometrie, werden im SFB 701 erforscht.

Aperiodische Ordnung muss sich beugen!

Es war eine fundamentale Einsicht von Max von Laue (Nobelpreis für Physik, 1914) und Sir William Lawrence Bragg (Nobelpreis für Physik, 1915), dass man Beugungsexperimente mit Röntgen- oder Teilchenstrahlen zur Strukturbestimmung von Festkörpern oder anderen makroskopischen Objekten einsetzen kann. Dies hat zu einem besseren Verständnis der Kristalle geführt, aber auch zur Entschlüsselung der Struktur der DNA (durch James Watson und Francis Crick, Nobelpreis für Medizin, 1962) und zur Entdeckung der Quasikristalle (1982). Heute untersucht man die recht komplexen mathematischen Zusammenhänge mit Methoden der diskreten Geometrie, der Maßtheorie und der harmonischen Analysis. Die berühmte Penrose-Pflasterung und ihr Beugungsbild geben dabei einen ersten Eindruck von der Komplexität aperiodischer Ordnung (es kann wegen der 5-zähligen Dreh-Symmetrie keine Translationsinvarianz geben), zugleich aber auch



Die Penrose-Pflasterung (links) und ihr Beugungsbild

von der inhärenten Ästhetik der Strukturen. Das zugehörige inverse Problem, also die Frage nach dem Grad der Rekonstruierbarkeit einer Struktur aus einem gemessenem Beugungsbild, ist eine der Fragestellungen, an denen im SFB 701 geforscht wird.

Statistik von Resonanzfrequenzen

Was haben komplexe Systeme in der Physik, Biologie oder Informationstechnologie (wie z.B. Atomkerne, biologische Regelkreise, Vibrationsfrequenzen in gestörten Kristallen, Computernetzwerke, usw.) mit Primzahlen oder mit den Abständen zwischen parkenden Autos in London zu tun? Auf den ersten Blick sicher wenig, wenn man aber versucht, diese Systeme durch Modelle mit „zufälligen Interaktionen" zu beschreiben, so stellt man fest, dass die Resonanzfrequenzen in diesen Systemen eine universelle statistische Verteilung aufweisen. Diese Verteilungen treten auch bei interagierenden Systemen auf, wie z.B. bei der Verteilung der Abstände geparkter Autos. Überraschenderweise finden wir diese Verteilungen auch in komplexen Modellen der Mathematik wie z.B. bei der Analyse des Abstandes der Nullstellen der Riemannschen Zeta-Funktion, die eng verbunden mit der Verteilung der Primzahlen unter den natürlichen Zahlen ist. Für alle diese Beispiele hat man also ein universelles mathematisches Modell gefunden, nämlich die statistische Verteilung von Resonanzen komplexer dynamischer Systeme in zufälligen Medien. All diese Gesetzmäßigkeiten können somit durch die Analyse dieses einen Modells genauer untersucht werden. Diese Analyse stellt einen weiteren Forschungsschwerpunkt des SFB 701 dar.

Die Brownsche Bewegung ist überall

Im Jahr 1827 wurde die Brownsche Bewegung vom schottischen Botaniker Robert Brown entdeckt, der beobachtete, dass Pollenteilchen im Wasser unregelmäßig zuckende Bewegungen machen. Ihre exakte mathematische Beschreibung durch Albert Einstein und Marian Smoluchowski, sowie ihre Anwendung in der Finanzmathematik durch Louis Bachelier zu Beginn des 20. Jahrhunderts, markieren die Geburt der stochastischen Analysis.

Es ist geradezu unheimlich, wo die Brownsche Bewegung überall auftaucht. Sie tritt bei der Beschreibung und Modellierung einer ungeheuren Anzahl von stochastischen Phänomenen auf, die sich dynamisch in der Zeit entwickeln. Mit Hilfe der Brownschen Bewegung lassen sich zum Beispiel das sogenannte „Rauschen“ in der Informationstheorie genau beschreiben oder stochastische Resonanzphänomene in der Physik oder in der Klimaforschung verstehen. Sie wird als mathematisches Hilfsmittel in der Quantenphysik vielfältig eingesetzt und dient zur exakten Beschreibung von zufälligen Dynamiken von Preisentwicklungen oder Zinskurven an der Börse. Die in der stochastischen Analysis im SFB untersuchten Varianten der Brownschen Bewegung haben überraschende Verbindungen zu anderen Forschungsschwerpunkten im SFB aus der Geometrie und Algebra: Die universellen geometrischen Eigenschaften der Brownschen Bewegung auf gekrümmten Flächen und anderen Mannigfaltigkeiten liefern nach Mittelwertbildung über eine lange Laufzeit einen wichtigen Zugang zu topologischen Invarianten der Geometrie dieser Objekte. Auch Strukturdaten von Symmetriegruppen hoher Dimension – eine wesentliche Fragestellung aus der Algebra – können mittels der Brownschen Bewegungung in bestimmten Teilmengen des euklidischen Raumes beschrieben werden.

IGK – ein Kurzportrait

→ igk.math.uni-bielefeld.de

Das Internationale Graduiertenkolleg „Stochastics and Real World Models“ (IGK; Sprecher: Prof. Dr. Michael Röckner (Bielefeld), Prof. Dr. Zhi-Ming Ma (Peking)) ist ein gemeinsames Projekt der Universität Bielefeld und der Chinesischen Akademie der Wissenschaften. Es baut auf einer mehr als zwanzigjährigen Zusammenarbeit der beteiligten Mathematiker und Physiker im Rahmen des Forschungszentrums BiBoS (Bielefeld-Bonn Stochastics) auf, die durch Wissenschaftler aus dem IMW (Institut für Mathematische Wirtschaftsforschung) verstärkt werden. Finanziert wird das IGK, das zwölf Dokto-

Gemeinsam für Forschung und Ausbildung: Y. Yang (Chinesische Botschaft, Berlin), Z.M. Ma (Sprecher in Peking), M. Röckner (Sprecher in Bielefeld), S. Ma (Graduate University der Chinesischen Akademie der Wissenschaften), D. Timmermann (Rektor der Universität Bielefeld), M. Stückradt (Forschungsministerium NRW) und H.J. Simm (Kanzler der Universität Bielefeld) auf der Zweijahresfeier des IGK im Mai 2008.

randen mit Stipendien fördern kann, regelmäßig Gastvorlesungen von Spezialisten aus aller Welt organisiert und seinen Studenten ein Austauschprogramm mit den Partnern in Peking anbietet, durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG).

Das IGK ist eine interdisziplinäre Einrichtung, in der die Ausbildung der Promovenden zu Spezialisten in der Wahrscheinlichkeitstheorie mit deren Anwendungen in Physik und Wirtschaftswissenschaften verknüpft wird. Diese Verknüpfung hat immer zwei Richtungen: Einerseits wird mathematische Theorie für Wissenschaftler aus anderen Feldern zugänglich gemacht, und andererseits liefern Probleme aus den anderen Feldern immer wieder spannende Fragen, die zu neuer mathematischer Forschung motivieren.

Woran wird im IGK geforscht?

Die grundlegende mathematische Disziplin des IGK ist, wie schon erwähnt, die Wahrscheinlichkeitstheorie, insbesondere das Teilgebiet der stochastischen Analysis, die ja auch im SFB 701 zu den Forschungsschwerpunkten gehört. Also ist gewissermaßen auch im IGK die Brownsche Bewegung überall.

Warum die Rolle der Brownschen Bewegung so zentral und so faszinierend universell ist, lässt sich mathematisch erklären und hängt mit dem zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitstheorie zusammen, der zum Vorlesungsstoff des dritten Mathematikstudienjahres gehört. Er ist eine Verallgemeinerung des aus dem Stochastikunterricht in der Schule bekannten Satzes von de Moivre-Laplace.

Die Forschung und Ausbildung im IGK führt somit tiefliegende mathematische Theorie und vielfältige Anwendungen zusammen, besonders in der Physik und in den Wirtschaftswissenschaften (siehe unser zweites Beispiel weiter unten), aber wegen der Universalität und Anwendbarkeit mathematischer Konzepte auch darüber hinaus, zum Beispiel in der Ökologie.

Mathematisches High-Tech für Ökologen

Bei der mathematischen Simulation von Populationen von Tieren und Pflanzen denkt man zunächst an exponentielles Wachstum („die Zahl verdoppelt sich jedes Jahr“) und an den Einfluss von Fressfeinden. Aber es ist offensichtlich, dass die Individuen einer Art auch untereinander konkurrieren – Pflanzen etwa um Wasser, Boden und Licht. Solche Situationen untersucht die Theoretische Ökologie, etwa in Modellen wie diesem:

Der Lebensraum wird dargestellt durch die Euklidische Ebene (R^2), und die Pflanzen durch Punkte in der Ebene. Neue Pflanzen erscheinen in der Umgebung von alten Pflanzen (durch Ableger oder Versamung), etablieren können sie sich aber nur, wenn nicht zu viele andere Pflanzen in nächster Nähe stehen. Jede Pflanze hat eine zufällige Lebensdauer (zum Beispiel exponentialverteilt), an deren Ende sie eines natürlichen Todes stirbt. Wird sie durch zu viele Nachbarn bedrängt, kann sie aber auch im Wettbewerb zugrunde gehen.

Anhand solcher Modelle wird analytisch und mit Hilfe von Simulationen untersucht, wie sich Pflanzenpopulationen in Abhängigkeit von verschiedenen Parametern – etwa: Anzahl und räumliche Verteilung der Nachkommen, Form und Ausprägung der Konkurrenz-Effekte, Lebensdauer und Einflüsse bei der Etablierung von Jungpflanzen – entwickeln. Berechnet werden so etwa die zeitliche Entwicklung der durchschnittlichen Bevölkerungszahl oder sogenannte Kovarianzen: Funktionen, welche die Auswirkungen bestimmter Modelleigenschaften auf die weitere Modellentwicklung angeben. So hat eine große Anzahl von Pflanzen zunächst eine große Anzahl von Nachkommen – die Anzahl der Pflanzen hat also eine positive Kovarianz mit sich selbst. Andererseits führt der Wettbewerb um Ressourcen tendenziell zu einer Ausdünnung stark bevölkerter Bereiche – der Wettbewerb erzeugt also eine negative Kovarianz. Würde das Modell noch den Einfluss von Fressfeinden umfassen, so würden diese ebenfalls eine negative Kovarianz erzeugen, während das reichliche Vorhandensein von Nährstoffen eine positive Kovarianz generieren würde.

Um solche Modelle aufzustellen und zu verstehen, braucht der theoretische Ökologe von heute zunächst keinen Mathematiker. Um jedoch zu prüfen, ob ein Modell sinnvoll ist, muss er sich häufig doch Unterstützung holen. So kann es zum Beispiel leicht passieren, dass ein Modell eine Dynamik generiert, deren Kovarianzen den Wert „unendlich" annehmen – unter bestimmten Umständen würden dann in diesem Modell unendlich viele Pflanzen wachsen, was (ökologisch und mathematisch) Unsinn ist. Einer der Projektleiter aus dem IGK hat vor kurzem mit einigen Kollegen gezeigt, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit in dem oben beschriebenen Modell nur „vernünftige" Kovarianzen auftreten.

Eine andere interessante Frage ist die, wann ein Modell sich über lange Zeit halbwegs stabil verhält: Gibt es nur wenige Pflanzen, so werden diese sich zunächst vermehren – gibt es zu viele, so wird sich ihre Anzahl zunächst reduzieren. Einer der Promovenden des IGK arbeitet an der Frage, unter welchen Bedingungen ein Modell für Plankton (also ein Modell, in dem auch die Bewegung von Organismen möglich ist) über lange Zeit stabil bleiben kann.

Mit ähnlichen Modellen untersuchen Mathematiker unter anderem die Ausbreitung von Infektionen oder die soziale Interaktion von Menschen. Ursprünglich stammen sie aus der Physik, dort wurden sie zur Untersuchung der Interaktion atomarer Teilchen entwickelt.

Die mathematischen Methoden für solche Untersuchungen stammen aus der Funktionalanalysis. In der klassischen (Schul-) Analysis werden normalerweise Funktionen „von R nach R“ untersucht, also Funktionen, deren Argumente und Bilder reelle Zahlen sind. Dagegen betrachtet die Funktionalanalysis Funktionen, deren Argumente und Bilder wiederum Funktionen sind. Auch in dieser Situation kann man (oft) Ableitungen und Integrale definieren, viele Gesetze der klassischen Analysis gelten mit wenigen Änderungen weiterhin – manche aber auch gar nicht. Welche das sind, lernen Studierende der Mathematik etwa ab dem dritten Studienjahr.

Wie bezahlt man Geldverwalter?

Riestern Sie schon? Nach den Änderungen der Regierung Schröder, die das Rentensystem an den demographischen Wandel anpassen sollen, ist das individuelle Sparen fürs Alter für viele Deutsche zur Selbstverständlichkeit geworden. Als langfristig erfolgversprechendste Anlageform gelten Aktien, und so landet ein großer Teil dieser Ersparnisse am Aktienmarkt.

Nur die wenigsten kennen sich am Aktienmarkt so gut aus, dass sie sich selbst die Entscheidungen an der Börse zutrauen. Sogar die Frage, wer die Verantwortung für ihr Geld übernimmt, beantworten sie nicht selbst, sondern übergeben ihre Ersparnisse einem Fonds-Anbieter, dessen Manager den Auftrag bekommen, das Geld so anzulegen, dass es langfristig möglichst viel Gewinn bringt. Der Fonds-Anbieter hat nun folgendes Problem: Nach welchen Regeln bezahlt man den Manager?

Bekommt der Manager ein pauschales Einkommen, so hat er keinen Anreiz, sich allzu sehr zu bemühen – irgendwie werden die Anlagen schon ein bisschen Gewinn abwerfen, und wenn nicht, ist halt der Markt schuld. Zahlt man dem Manager dagegen nur einen Anteil am Gewinn, den er erwirtschaftet, so wird man (gerade in Krisenzeiten) keinen Manager bekommen – schließlich will niemand das Risiko eingehen, zum Nulltarif zu arbeiten. Zahlt man dem Manager zu wenig, geht er zur Konkurrenz – zahlt man ihm zu viel, so sind die Kosten des Fonds zu hoch, und die Kunden gehen.

Die Lösung sieht ungefähr so aus: Das optimale Managergehalt setzt sich zusammen aus einem festen Betrag, einem Zusatzbetrag je nach verwalteter Geld-Menge, und einem erfolgsabhängigen Bonus. Um diesen Bonus zu bestimmen, wird ein „Benchmark-Portfolio" bestimmt, und der Bonus ist abhängig davon, ob der Manager dieses Benchmark-Portfolio übertrifft.

Genaue Regeln für dieses hier nur vage beschriebene Konzept entwickelt einer der Promovenden des IGK unter der Anleitung eines Wissenschaftlers vom IMW. Das IMW ist eines der ältesten Forschungsinstitute der Universität Bielefeld, sein erster Leiter war der spätere Nobelpreisträger für Wirtschaftswissenschaften, Professor Selten. Die Forscher am IMW arbeiten an mathematischen Methoden und Modellen für die Wirtschaftswissenschaften, und bilden im Rahmen des Studienganges „Wirtschaftsmathematik“ Studenten in diesen Methoden aus.

Die „Stochastik der Finanzmärkte“ ist ein Teilgebiet der stochastischen Analysis. Hier werden zum Beispiel Martingale untersucht (zufällige Dynamiken, für deren zukünftiges Verhalten man keinen positiven oder negativen Trend vorhersagen kann) und stochastische (partielle) Differenzialgleichungen, also mathematische Modelle für allgemeine Dynamiken mit zufälligen Einflüssen.

FSPM – ein Kurzportrait

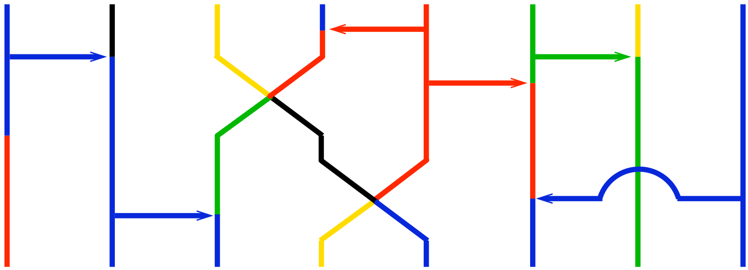
→ www.math.uni-bielefeld.de/fsp-math/

Der „Forschungsschwerpunkt Mathematisierung“ (FSPM; Sprecherin: Prof. Dr. Ellen Baake) ist eine fakultätsübergreifende Einrichtung, die eine gemeinsame Plattform für Anwendungen von Mathematik in Natur- und Wirtschaftswissenschaften bietet. Dabei geht es um Forschung wie auch um Ausbildung in mathematischer Modellierung und mathematischen Lösungsansätzen. Zahlreiche interdisziplinäre Kooperationen wurden in diesem Rahmen initiiert und liefern Stoff für gemeinsame Publikationen, Workshops und gemeinsam betreute Abschluss- und Doktorarbeiten. Derzeit liegt das Hauptaugenmerk auf Forschungsprojekten in den theoretischen Biowissenschaften, den theoretischen Materialwissenschaften sowie der mathematischen Wirtschaftsforschung. Im Folgenden wird exemplarisch eine Auswahl solcher Arbeitsbereiche vorgestellt.

Mathematische Populationsgenetik: Ahnenlinien im Moran-Modell

Wie man aus dem Biologieunterricht weiß, beruht biologische Evolution auf dem Zusammenwirken von Einflüssen wie Selektion, Mutation und Rekombination. Der Begründer der biologischen Evolutionstheorie, Charles Darwin, konnte noch ganz ohne Mathematik auskommen; tatsächlich wäre sein Studium um ein Haar an einer Prüfung in Elementarmathematik gescheitert. Erst mehr als ein halbes Jahrhundert nach ihm zog die Mathematik in diesen Bereich der Biologie ein, und zwar mit Ronald Fisher, Sewall Wright und John Haldane, die realisierten, dass es ohne mathematische Modelle aussichtslos ist, das Zusammenwirken der verschiedenen evolutionären Kräfte genauer zu verstehen. Es entstand das Arbeitsgebiet der mathematischen Populationsgenetik, eines der ältesten Gebiete der mathematischen Biologie – und zugleich eines der erfolgreichsten und schönsten, was daran liegt, dass die Gesetze der Genetik (wie etwa die Mendel'schen Regeln) einer mathematischen Beschreibung besonders zugänglich sind.

Eines der fundamentalen Modelle ist das Moran-Modell. Es beschreibt eine Population konstanter Größe, wobei jedes Individuum durch eine vertikale Linie dargestellt wird. Die Zeit läuft von oben nach unten. Jedes Individuum hat einen Typ (seine Farbe) und kann zu jedem Zeitpunkt eines von drei Dingen tun: es kann mutieren (die Farbe wechseln); es kann sich reproduzieren (wobei der Nachkomme



Das Moran-Modell

ein zufällig ausgewähltes anderes Individuum ersetzt, wie durch die Pfeile angedeutet: das Elternindividuum ist an der Pfeilbasis, das Kind an der Pfeilspitze, und das Individuum oberhalb der Spitze stirbt); oder zwei Individuen können rekombinieren (das sind die Überkreuzungsereignisse, bei denen zwei neue, 'gemischte' Typen entstehen).

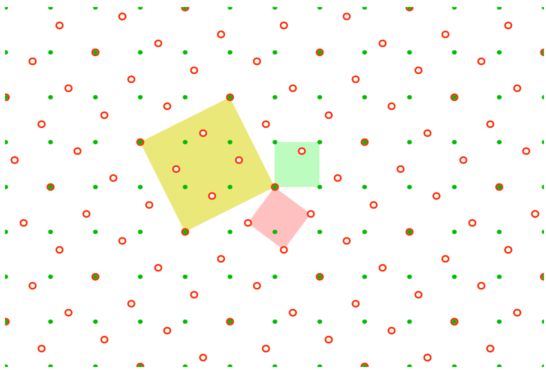
Wenn wir die Geburtsraten der verschiedenen Farben kennen, sowie die Mutationsraten und Rekombinationsraten der Farben untereinander, können wir das Verhalten vorhersagen. Wichtiger aber noch: Wir können von der Gegenwart auf die Vergangenheit zurückschließen, d.h. Fragen angehen wie: Mit welcher Wahrscheinlichkeit war der Vorfahr eines heute zufällig aus der Population herausgegriffen Individuums vor langer Zeit 'rot' (an Überkreuzungsstellen nehme man jeweils mit Wahrscheinlichkeit ½ den 'rechten' oder den 'linken' Elternteil)? Wann lebte der letzte gemeinsame Vorfahr einer Stichprobe aus der heutigen Population?

Um solche Fragen anzugehen, braucht man eine bunte Mischung von Werkzeugen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie, der Theorie der (gewöhnlichen und partiellen) Differenzialgleichungen, der diskreten Mathematik sowie der statistischen Physik – gerade in der Methodenvielfalt liegt ein besonderer Reiz. Eine Teilantwort lautet übrigens: Die Vorfahren heutiger Populationen waren in der Regel ‘fitter’ (hatten höhere Reproduktionsraten) als ihre Nachkommen heute.

Korngrenzen und Schnittgitter

Korngrenzen entstehen bei realem Kristallwachstum und sind aus Sicht der Anwendungen mehr (z.B. bei Materialverbindungen) oder weniger (bei Silizium-Einkristallen) erwünscht. Aus diesem Grund benötigt man eine Klassifikation aller Möglichkeiten. Mathematisch übersetzt sich das Problem in die Bestimmung aller möglichen Schnitte von Gittern mit gedrehten Kopien, wie unten im Bild exemplarisch für das Quadratgitter dargestellt ist.

Für die Lösung dieses Klassifikationsproblems kommen Methoden aus der diskreten Geometrie (Gitter und Packungen), aus der Kombinatorik (Abzählungen und erzeugende Funktionen), aus der



Schnitt von zwei Quadratgittern: Die Gitter sind gegeneinander um den Winkel 36.87 Grad gedreht

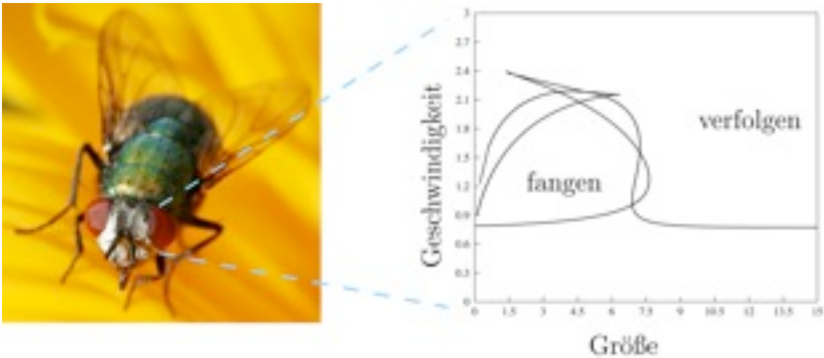
Algebra (Gruppentheorie) und aus der Zahlentheorie (Körper und Zetafunktionen) zum Einsatz. Dabei handelt es sich jedoch keinesfalls nur um die Anwendung bekannter Resultate, sondern es ergeben sich dabei laufend neue Fragen, die auch für die reine Mathematik von Interesse sind. Daher kooperiert dieser Bereich eng mit dem SFB.

Das Verhalten von Goldfliegen – aus dem Blickwinkel der Mathematik

Goldfliegen vollführen virtuose Flugmanöver, die zu den schnellsten in der Natur zählen. Diese Fähigkeit ist insbesondere für eine erfolgreiche Paarung entscheidend, bei der die männlichen Fliegen die Weibchen verfolgen und fangen.

Es stellt sich die Frage, wie diese kleinen Insekten in der Lage sind, so schnelle Flugmanöver zu steuern. Eine Antwort auf diese Frage wurde durch eine Kooperation von Biologen und Mathematikern gefunden. Zunächst half den Biologen die Tatsache, dass männliche Fliegen auch schwarze Kugeln verfolgen, deren Größe und Geschwindigkeit vom Experimentator gesteuert werden können. Als Flugbahn der Kugel wurde der Einfachheit halber eine Kreisbahn gewählt. Die Experimente zeigen, dass die Männchen die Kugeln bei bestimmten Geschwindigkeiten fangen, bei anderen Geschwindigkeiten hingegen in konstantem Abstand verfolgen. Basiert dieses zweigeteilte Verhalten der Fliege auf einer bewussten Entscheidung dieses so kleinen Lebewesens?

Zur Klärung dieser Frage wurde das Modell der virtuellen Fliege entwickelt; ein auf Rückkopplung ba-



Goldfliege und ermitteltes Trennkurvendiagramm

sierendes System, das formal mit Hilfe von Differenzialgleichungen beschrieben wird. Es modelliert die Flugbahn der männlichen Fliege in Abhängigkeit von der Position der Kugel. Zusätzlich besitzt dieses Modell verschiedene Parameter, wie zum Beispiel die Größe und die Geschwindigkeit der Kugel.

Man kann in diesem Modell mathematisch nachweisen, dass der Flieger die Kugel für bestimmte Geschwindigkeiten in konstantem Abstand verfolgt, bei anderen Geschwindigkeiten jedoch fängt. Entsprechende Trennkurven, bei deren Überquerung sich das Verfolgungsverhalten ändert, sind im Bild angegeben. Für die Analyse ist es entscheidend, das Modell auf eine möglichst einfache Form zu transformieren. Als geschickt stellte sich heraus, statt eines globalen Koordinatensystems mit Ursprung in (0,0), in das lokale System der Fliege zu wechseln, also den Ursprung in das Cockpit der Fliege zu verlegen.

Die interdisziplinär durchgeführte Analyse zeigt insbesondere, dass das zweigeteilte Verhalten der Fliege ohne bewusste Entscheidungen erklärbar ist.

Ein einfaches dynamisches System – in Form einer Differenzialgleichung – ist in der Lage, das beobachtete komplexe Verhalten zu erzeugen. Die Beschreibung mit Differenzialgleichungen, ursprünglich von Newton zur Erklärung der Planetenbewegung ersonnen, ist ein erstaunlich flexibles und leistungsfähiges mathematisches Handwerkszeug. In zunehmendem Maße trägt es auch zum tieferen Verständnis lebender Systeme in der Biologie bei – vom mikroskopischen Bereich der Zellstrukturen bis zum makroskopischen Verhalten von Tieren wie in dieser Fallstudie.

Erfolgreich international forschen

Da der Dialog zwischen Wissenschaftlern eine wesentliche Grundlage erfolgreicher Forschung ist, bietet unsere Fakultät Mathematikern (und allen, die es werden möchten) ein außerordentlich interessantes wissenschaftliches Umfeld: Das umfassende Gästeprogramm (über 500 Gäste des SFB 701 aus (fast) allen Ländern der Welt seit 2005) und das große Angebot an Workshops und Vorträgen (über 30 Workshops, über 600 Vorträge) bieten hervorragende Voraussetzung für den Austausch zwischen allen Bereichen der Mathematik. Die Studierenden profitieren von Gastvorlesungen internationaler Spezialisten (ca. 10 pro Jahr im IGK). Darüber hinaus ermöglichen die verschiedenen Einrichtungen den Forschern (vom Promotionsstudenten bis zum Professor), Forschungsreisen zu Konferenzen und

Instituten in aller Welt zu unternehmen. Einen besonderen Schwerpunkt legen alle Projekte auf die Ausbildung und Unterstützung ihrer Studierenden. Gerade auch für Diplom- und Masterstudierende, die kurz vor dem Abschluss ihres Studiums stehen, bietet das Forschungsumfeld in den einzelnen Arbeitsgruppen der Fakultät die Möglichkeit, sehr früh in Kontakt mit Spezialisten aus Bielefeld und der ganzen Welt zu treten, internationale Kontakte zu knüpfen und schon früh an der Faszination wissenschaftlicher Zusammenarbeit, die für die mathematische Forschung entscheidend ist, teilhaben zu können.

Die hervorragenden Voraussetzungen für wissenschaftliche Arbeit, die in Bielefeld in den letzten Jahrzehnten geschaffen werden konnten, haben zu wissenschaftlichen Erfolgen geführt, die viel Anerkennung gefunden haben. So erreichte die Fakultät im letzten CHE-Ranking einen Platz in der „Excellence Group“ der zwanzig am besten bewerteten Mathematikfakultäten in ganz Europa (**www.excellenceranking.org**). Die Goldmedaillen in den Kategorien „Anzahl Publikationen“ und „Anzahl meist zitierter Autoren“ sowie die Silbermedaille in der Kategorie „Anzahl Zitierungen“ zeugen von der weltweiten Resonanz der mathematischen Forschung in Bielefeld. Neben den Preisen für einzelne Bielefelder Mathematiker sollte noch das außergewöhnliche Interesse weltweit führender Forscher erwähnt werden, in Bielefeld zu arbeiten: Seit vielen Jahren lockt regelmäßig keine andere Mathematikfakultät in Deutschland so viele Humboldt-Preisträger und Humboldt-Stipendiaten an, wie die in Bielefeld.

Was bedeutet das jetzt für mich?

Der Karriereweg eines angehenden Forschers beginnt in Bielefeld mit einer strukturierten Grundausbildung im Rahmen der Bachelor- und Masterstudiengänge. Schon in dieser Zeit bietet sich die Möglichkeit, in Vorträgen und Gastvorlesungen aktuelle Forschung hautnah kennenzulernen oder bei der Vorbereitung eines Auslandsaufenthaltes von den hervorragenden internationalen Kontakten der hiesigen Wissenschaftler zu profitieren. Ganz selbstverständlich beschäftigen sich die hier gefertigten Masterarbeiten mit Themen der aktuellen Forschung, und eine Promotion in einem der oben vorgestellten Projekte bietet einen direkten Weg in die internationale Spitzenforschung.

Ein besonderes ‘Extra’ für Studierende der Mathematik in Bielefeld sind die vielfältigen Möglichkeiten, das mathematische Wissen mit den Nachbardisziplinen in Verbindung zu bringen. So bietet das Lehrangebot u. a. eine reichhaltige Auswahl an Lehrveranstaltungen zur Mathematischen Biologie, Bioinformatik und Mathematischen Physik. Das bereichert nicht nur das Studienangebot, sondern bietet auch die Möglichkeit, in einem interdisziplinären Bereich eine Abschlussarbeit anzufertigen. Aktuelle Forschungsbereiche sind etwa stochastische Modelle in der Genetik oder der Immunbiologie, dynamische Systeme in der Neurobiologie, oder Strukturmodelle für Festkörper. Viele dieser Veranstaltungen werden übrigens durch den FSPM organisiert und durchgeführt.

Aber vielleicht sehen wir uns ja schon früher als Sie denken – im Teutolab, einem äußerst erfolgreichen Projekt der Forschung in der Mathematikdidaktik (**www.math.uni-bielefeld.de/teutolab/**), oder im Rahmen des Projektes „Studieren ab 16“ (**www.uni-bielefeld.de/schuelerstudium**). Gerne stellen wir uns und die Studienmöglichkeiten an unserer Fakultät auch direkt in den Schulen vor – bitte sprechen Sie uns an! (Infos zu Schulbesuchen: **www.uni-bielefeld.de/Benutzer/SchuelerInnen/Buero/Mathe.html**)