Winterseminar 1909–1910 (Mathem. u. Psychologie) 1 ▷

Eröffnung des Seminars, 27. Okt. 1909.

Anwesend von Dozenten die Herren Bernstein und Nelson, die sich an der Leitung des Seminars beteiligen, sowie die Herren Töplitz und Zermelo.

Der Unterzeichnete entwickelt das Programm. Es handelt sich allgemein um die Berührungspunkte von *Mathematik* und *Philosophie*. Die im engeren Sinne *logischen* Fragen werden in der parallellaufenden Vorlesung Zermelo's zur Behandlung kommen, hier soll von all' den anderen geistigen Prozessen geredet werden, welche die logischen Prozesse begleiten, zum Teil ihnen auch vorangehen, und hier kurz als *psychologisch* bezeichnet werden.

Der Betrieb wird der sein, dass ich selbst — oder auch einer der Herren Bernstein und Nelson — über die einzelne Frage einen allgemein orientierenden Vortrag hält, an den sich sofort Diskussion und Nennung zugehöriger Literatur schliesst. 2 ▷

Die Studierenden übernehmen dann, über diese oder jene besonders interessante Veröffentlichung insbesondere zu referieren.

Hierbei muß eine gewisse *Kenntniß* der Prinzipien der heutigen wissenschaftlichen Mathematik vorausgesetzt werden, ausserdem eine *Disposition* zu philosophischem Nachdenken.

Die folgende Zusammenstellung von Thematen soll die Betätigung innerhalb des Seminars nicht festlegen, sondern nur einen gewissen Anhalt für die gestellte Aufgabe bieten:

1. Von der Arbeitsweise der schaffenden Mathematiker.

Die Art und Weise des Produzierens ist individuell ungemein verschieden. Hierüber werden interessante Selbstzeugnisse beizubringen sein. Z. B. von Gauß ... . Neuerdings Enquête der Zeitschrift Enseignement. In Deutschland Sammelforschung betr. übernormale Begabungen (Stern in Breslau, Lipmann in Neubabelsberg). 3 ▷

2. Vom Zustandekommen der mathematischen Grundanschauungen im heranwachsenden Individuum.

Sowohl Raumvorstellung (worüber von den Physiologen bzw. experimentellen Psychologen viel gearbeitet ist) als ⟨*auch*⟩ Zahlvorstellung. – Interessant u.a. der Unterschied der mathematischen und der künstlerischen Raumauffassung.

3. Entstehung und erkenntnistheoretischer Wert der mathematischen Axiome.

Wie so durch Anschauung, oder durch Erfahrung etc. gegeben? Vom Wesen des mathematischen Beweises.

4. Vom Irrtum der Mathematiker.

Die Möglichkeit des Irrtums historisch konstatiert (Theorem von Maxwell). Säkulare Irrtümer, die erst durch die Entwickelung der Wissenschaften korrigiert werden, cf. Entdeckung der einseitigen Flächen, der Nicht-Euklidischen Geometrie, der stetigen Funktionen ohne Differentialquotienten. 4 ▷
– Individuelle Irrtümer, durch Zufälligkeiten veranlasst. – Typische Irrtümer, die sich nicht ausrotten lassen: immer wieder erneute Versuche der Kreisquadratur, der Winkeltrisektion. (Die bisherigen Beweise des Fermat'schen Satzes bilden ⟨*eine*⟩ Sammlung individueller Irrtümer).

5. Folgerungen betr. den mathematischen Unterricht.

Methoden des Kindergartens und der Volksschule: methodischer Aufbau einer rein deskriptiven Raumlehre bez. eines rein praktischen Rechenunterrichts.

In den höheren Schulen Ineinandergreifen einer vorläufigen Propädeutik und einer strengeren Begründung.

An den Hochschulen: Mathematische Vorlesungen für Techniker oder Ingenieure, für eigentliche Mathematiker auf verschiedenen Stufen der Durchbildung. 5 ▷

6. Von der Stellung der Mathematik im System der Wissenschaften.

Historisches über die Bedeutung des Wortes „Mathesis" im Altertum, in der Renaissance etc. etc.

Bedeutung des Wortes bei neueren Autoren.

Unser tatsächlicher Wirkungsbereich und die Geltung, die wir dementsprechend beanspruchen müssen.

[In der Diskussion wurden auch verschiedene andere Themata in Vorschlag gebracht, z.B. *Wechselbeziehung von Mathematik und Sprache*, Wert der *Bezeichnung* innerhalb der Mathematik (cf. symbolische Methoden), Unterschiede von mathematischer Wissenschaft und math. *Spiel*, etc. etc.]

Klein. 6 ▷

Sitzung vom Mi. 3. Nov. 1909

= Inangriffnahme des Themas I (Arbeitsweise der schaffenden Mathematiker).

Weyl berichtet über die betr. Enquête in den Bänden 1905–1908 des Enseignement. Sie kann nur als ein erster Vorstoss in der uns interessierenden Richtung angesehen werden. Denn weder die 30 Fragen noch die auf sie bezüglichen Antworten sind präzis genug, um darauf irgendwelche allgemeinen Schlüsse zu basieren. 7 ▷

Klein erzählt von der Entstehung seiner Arbeiten über Nicht-Euklidische Geometrie (1871, 1872. Uebereinstimmung der Nicht-Euklidischen Geometrieen mit den verschiedenen Fällen von Cayley's projektiver Maassbestimmung).

Klein hatte durch Plücker und Clebsch die projektive Denkweise gelernt, er hatte dann mit grosser Begeisterung ⟨*im*⟩ Herbst 1869 Cayley's Abhandlung gelesen[1 *)]. Er hörte dann im Winter 1869–70 (in Berlin) durch *Stolz*, der mit ihm dort studierte, einiges von dem Vorhandensein der Nichteuklidischen Geometrie.

Es war ihm dann sofort *selbstverständlich*, dass beide Dinge übereinstimmen müssten. Er entwickelte diese Ansicht im Februar 1870 in dem von Weierstraß geleiteten math. Seminar am Schluss eines Vortrags über die Cayley'sche Maassbestimmung in Form einer Frage. Aber Weierstraß erwiederte, dass es sich um gänzlich getrennte Gebiete der Wissenschaft handele. Hierauf liess Klein die Idee bis auf weiteres fallen.

Sie trat für ihn erst wieder hervor, als er im Sommer 1871 mit *Stolz* erneut zusammen war (diesesmal in Göttingen). 8 ▷

Stolz erzählte ihm Einzelheiten aus Lobatscheffsky, v. Staudt, Beltrami (die Klein damals überhaupt nicht gelesen hat; auch heute noch kennt er sie sehr mangelhaft). Es ergab sich überall Übereinstimmung mit der richtig verstandenen Cayley'schen Doktrin. Andererseits starke Hemmung durch die insbesondere von *Lotze* ausgehende Ansicht, dass die ganzen Nichteuklidischen Spekulationen unsinnig seien. Aus diesem Hin und Wider ist die erste Publikation erwachsen, die in kurzer Form in den Göttinger Nachrichten vom August 1871 und bald darauf ausgeführt in Ann. 4 erschienen ist.

Die Abhandlung in Ann. VI (1872) lässt den grossen Widerstand erkennen, den die Darlegungen im Kreise der Mathematiker fanden. Auch *Cayley* selbst hat sich nie zu voller Zustimmung durcharbeiten können. Er sagte 1873 auf der Versammlung der British Association in Bradford, dass er

[1 *)] *aufmerksam gemacht durch die Darstellung in Salmon, Fiedler ⟨Fußnote auf Seite 6 des Originals⟩*

das Parallelenaxiom als „strictly axiomatic“ ansehe, und noch in Bd. II seiner gesammelten Werke p. 605 findet sich die Bemerkung, dass eine Begründung des Abstandsbegriffs auf v. Staudt's projektive Einführung der Koordinaten zum mindesten den Anschein eines Zirkelschlusses hervorrufe. 9 ▷

Da liegt also ein Beispiel vor, dass eine bestimmte mathematische Einsicht ⟨*von Klein gestrichen: , die von den späteren Mathematikern als selbstverständlich angesehen wird*⟩ zuerst in einem Individuum sozusagen präformiert ist und dann erst durch den Widerspruch, den sie findet, von diesem Individuum als ein Fortschritt empfunden und im Kampf mit allerlei Einwänden allseitig klar herausgearbeitet wird.

Die weitere Entwickelung ist dann die, dass die kommende mathematische Generation das Ergebnis von vornherein als etwas feststehendes rezipiert, die früheren Meinungsverschiedenheiten überhaupt nicht mehr versteht und über die ganze Sache mehr oder minder zur Tagesordnung übergeht.

Klein.

Pr. *Helmholtz* sagte mir, als ich ihn 1893 fragte, welche innere Beziehung für ihn zwischen der allgemeinen Geltung des Prinzips der kleinsten Wirkung in der Gesammtphysik (1885) und der Geltung des Prinzips der Erhaltung der Kraft (1847) bestehe: für ihn bestehe die Analogie darin, dass ihm Beides 10 ▷
von Hause aus selbstverständlich gewesen sei.

[Was meine eigenen Arbeiten angeht, so bin ich oft in der Weise vorgegangen, dass ich die Resultate zweier Teilgebiete als gegeben ansah und fragte, was das eine für das andere bedeute. Man vergleiche als typisch die Benutzung der algebraischen Invariantentheorie bei meiner Einführung der hyperelliptischen und Abelschen σ-Funktionen, Math. Ann. Bd. 27, 32, 36. Ich habe mich bei der Aufstellung der betr. Sätze vielfach von einem unbestimmten aber hinterher richtigen Gefühl der Analogie leiten lassen. Besonderes Vergnügen hat mir dies gemacht: ich wusste nicht recht, welche Invariante einer binären Form Sylvester Katalektikante genannt hatte; aber ich stellte mir vor, dass das erste Glied in der Reihenentwickelung gewisser hyperelliptischer Sigma eben diese Katalektikante sein müsse. Hilbert hat mir erst geholfen, die Sache in Ordnung zu bringen, aber das Theorem, wie ich es vermutete, war wirklich richtig.]

Klein. 11 ▷

Sitzung vom Mi. dem 10. Nov. 1909

Klein erzählt einiges von *Gauß'* Arbeitsweise, wie sie uns zum Teil in Gauß' Briefwechsel, dann namentlich in dem besonders wichtigen *Tagebuch* entgegentritt, das in Ann. 57 veröffentlicht ist.

Gauß' hat sehr frühzeitig begonnen (wie dies übrigens auch Euler getan hat), sich für das Verhalten ganzer Zahlen ausserordentlich umfangreiche Tabellen zu entwerfen; vergl. etwa die in Bd. II abgedruckten Tafeln für die Dezimalbruchentwickelung von $1/p$ für alle Primzahlen unter 1000, oder die Auszählung der Primzahlen in den ersten 3 Millionen ebenda. Er muß sich aber auch mit den Zahlwerten der wichtigeren in der Analysis vorkommenden Konstanten, ihren Logarithmen etc. auf alle Weisen vertraut gemacht haben, so dass er in der Lage war, sie überall wiederzuerkennen. So vorbereitet findet er die merkwürdigsten Resultate *induktiv*, um dann in angestrengter und vielfach sehr mühsamer Arbeit die Beweise zu zwingen. 12 ▷

Verhältnismässig naheliegend, und auch von anderen Autoren gebraucht, ist dies Verfahren in der *Zahlentheorie*; vergl. Gauß' Auffindung des Reziprozitätsgesetzes quadratischer Reste oder sein Vergleich der Primzahlfrequenz mit $\int \frac{dx}{\log x}$. Aber Gauß gebraucht die gleiche Methode auch in seinen Untersuchungen über *elliptische Funktionen*! Vergl. Nr. 63 des Tagebuchs, wo er den Faktor, um den sich die Thetafunktion der lemniscatischen Funktionen bei Veränderung des Arguments um eine Periode vermehrt, durch numerische Rechnung $= e^{\pi/2}$ findet, oder Nr. 98, wo er entdeckt, dass das arithmetische Mittel von 1 und $\sqrt{2}$ bis auf die $11^{\underline{\text{te}}}$ Dezimale mit $\frac{\pi}{\widetilde{\omega}}$ zusammenstimmt (unter $\widetilde{\omega}$ die lemniscatische Periode verstanden)! Er fügt hinzu: „qua re demonstrata prorsus novus campus in analysi certo aperietur". Und erst 6 Monate darauf beginnen sich die theoretischen Resultate einzustellen.

Sehr merkwürdig ist auch, wie er sich *Olbers* gegenüber über seine Vorzeichenbestimmung der „Gaussischen Summen" äussert, die ihm, dem Tagebuch zufolge, am 30. August 1805 gelungen war (Nr. 123). Er schreibt 13 ▷
unter dem 5. Sept. 1805: (Briefwechsel, Bd. I, p. 268): Alles Brüten, alles Suchen (nach dem Beweis des induktiv gefundenen Resultats) ist 4 Jahre lang umsonst gewesen, traurig habe ich jedesmal die Feder wieder niederlegen müssen. Endlich vor ein paar Tagen ist's gelungen — aber nicht meinem mühsamen Suchen, sondern bloss durch die Gnade Gottes möchte ich sagen. Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Rätsel gelöst etc. etc. (das Genauere muß an Ort und Stelle nachgelesen werden).

Man sieht: unendlicher Fleiss schafft die Vorbereitung, bis sich plötzlich die befreiende Ideenbildung vollzieht. (Gauß soll übrigens geäußert haben, dass er sich nur durch seinen Fleiss von anderen Mathematikern unterscheide).

Hierauf berichtet *Freundlich* von der psychologischen Untersuchung der Verfahrungsweisen berühmter Kopfrechner. Nach *Binet*, Les grands calculateurs et joueurs d'échec, Paris 1894, hat die Pariser Akademie bei den damals berühmten Rechnern *Inaudi* und *Diamandi* als gemeinsames nur 14 ▷

konstatieren können, dass beide ganz ohne mathematische Bildung waren; der erstere erwies sich durchaus auditiv, der letztere visuell veranlagt, womit zusammenhing, dass je nach der Art der Fragestellung bald der eine bald der andere rascher arbeitete.

Der Rekord der Beiden ist seitdem längst geschlagen worden durch unseren Dr. *Rückle*, der bei Hilbert mit einer zahlentheoretischen Dissertation promovierte und dessen Rechenfertigkeit seitdem von G. E. Müller eingehend untersucht wurde (Mitteilung an den psychologischen Kongress, Giessen, 190⟨?⟩; noch nicht veröffentlicht). Dr. Rückle tritt neuerdings auf Spezialitätenbühnen mit grossem Erfolg auf. Er unterscheidet sich jedenfalls dadurch von den sonst bekannten grossen Rechnern, dass er über wirkliche mathematische Berechnung verfügt und diese zweifellos auch bei der Durchführung seiner Rechenoperationen benutzt. 15 ▷

Sitzung vom Di. dem 16. Nov. 1909

(verbunden mit Mathem. Gesellschaft)

Nelson verliest einen Brief des 22-jährigen Dirichlet an seine Mutter (datiert Dresden, 29. Okt. 1827). Dirichlet schildert darin, wie er sich lange vergebens mühte, Gauß' erste Mitteilungen über die Reziprozitätsgesetze der biquadratischen Reste zu beweisen. „Eines Abends, wo ich einsam auf der Elbbrücke wanderte, hatte ich einige Ideen, welche mich in den Besitz des so lange und eifrig gesuchten setzen zu müssen schienen. Auf der herrlichen Brühlschen Terrasse überließ ich mich mehrere Stunden lang meinen Gedanken, konnte aber dennoch mit der Sache nicht fertig werden. Mit sehr geschwächter Hoffnung legte ich mich zu Bette und brachte die Nacht sehr unruhig zu, bis ich endlich gegen 1 Uhr in einen ordentlichen Schlaf fiel, aus dem ich aber um 4 Uhr schon wieder erwachte, indem ich den Medizinalrat, der in derselben Stube schlief, mit dem Ausruf aufweckte: „Ich habe es gefunden". Aufstehen, Licht anzünden und mich mit der Feder in der Hand von der Richtigkeit der Sache überzeugen, war die Sache eines Augenblicks. etc. etc." 16 ▷

[Aehnliche Selbstangaben über das plötzliche Zustandekommen der geeigneten Gedankenwendung besitzt *Töplitz* betr. Rosenhain].

Freundlich berichtet im Anschluss an seinen vorigen Vortrag, was Binet über die Psychologie der grossen Schachspieler, insbesondere der Blindlingsspieler zu sagen weiß. Ueberraschend ist, dass bei letzteren keineswegs das visuelle Gedächtnis eine ausschlaggebende Rolle spielt, sondern vielmehr die logische Verknüpfung der sämtlichen Züge der einzelnen Partie. Dementsprechend haftet die Erinnerung sehr viel länger, als bei den Zahlenrechnern, wie denn z.B. Tarrasch sich nach 12 Jahren einzelner gespielter Partien genau erinnern konnte. Zu irgend welchen fassbaren allgemeingültigen Ergebnissen ist aber Binet nicht gekommen. Mit dem Gesagten stimmt recht gut, was

Landau über seine eigenen Versuche im Blindlingsspiel zu erzählen weiß[2 *)]. 17 ▷

Töplitz erzählt von dem „Institut für angewandte Psychologie und psychologische Sammelforschung" unter Leitung von Baade, Lipmann und Stern. Es bestehen Unterkommissionen für die verschiedenen Arten spezifischer Begabung, z. B. in Mathematik, zusammengesetzt je aus Fachmännern und einem eigentlichen Psychologen (für Mathematik ausser Töplitz, Blumenthal und Rupp [z. Zt. Assistent bei Stumpf]). Soeben ist ein (für sich bereits sehr umfangreiches) Fragment eines allgemeinen Fragebogens ausgegeben worden, der nun in den verschiedenen Unterkommissionen weiter zu prüfen sein wird[3 **)]. Bemerkenswert ist, dass man jetzt mehr die normalen, als die übernormalen Begabungen zu untersuchen strebt, weil man bei ihnen eher hoffen darf, zu zuverlässigen Durchschnittswerten zu gelangen.

Teilfragen, die im Anschluss daran besprochen wurden: 18 ▷

1) Zusammengehen von mathematischer und musikalischer Begabung. Von etwa 40 Anwesenden erklärten 18, dass sie Dur und Moll bestimmt unterscheiden können, 15, dass sie es nicht können. 9 sind (nach irgend welcher Richtung) ausübende Musiker.

2) *Klein* teilt in seinem Evanston Colloquium die Mathematiker in Philosophen, Intuitionisten und Algorithmiker. Was ist von dieser Einteilung zu halten? Was von der Trennung in „Klassiker" und „Romantiker", die *Ostwald* in seinem Buche über „Grosse Männer" allgemein bei den wissenschaftlichen ⟨*von Klein gestrichen: Männern*⟩ Forschern vornimmt?

3) *Bernstein* macht geltend, dass die spätere Arbeit des Forschers nicht nur von seiner Veranlagung, sondern sehr wesentlich von dem Einfluss der Umgebung anhängig sei. Vergl. z. B. die wesentlich arithmetische Haltung der Berliner mathematischen Schule oder auch zahlreicher italienischer Mathematiker, wo man doch an dem Vorhandensein ursprünglich geometrischer Begabung nicht zweifeln kann. 19 ▷

Sitzung vom 24. November 1909.

Bernstein berichtet einiges von den Meumannschen Untersuchungen. Es wird beim Erlernen z. B. von Zifferreihen geprüft, ob die Veranlagung mehr visuell oder auditiv sei. Freilich stehe dann noch nicht fest, ob das Ergebniß eine Folge verschiedenartiger ursprünglicher Veranlagung oder der Einwirkungen, denen das Individuum ausgesetzt war, sei. Als verbreitetste und auch

[2 *)] *⟨Fußnote auf Seite 17 des Originals⟩ G. E. Müller unterscheidet beim visuellen Gedächtnis zwischen topischem und Formengedächtnis; er sieht die Begabung der Blindlingsspieler als topisch-visuell an; die jeweilige Beschränkung auf einen Teil des Schachbretts liege an der Konzentration d. Aufmerksamkeit.*

[3 **)] *„Zeitschrift für angewandte Psychologie" Band. III 1909 = Fragment eines psychographischen Schemas.*

wohl nützlichste Art der Veranlagung ergebe sich die visuell-motorische[4*]. Die Schule habe einen a.o. Einfluß, solle aber lieber die Einseitigkeiten der Entwickelung abmildern als steigern. Wenn die italienische Mathematik z. Z. durchweg den Charakter gewisser Abstraktheit trage, so sei dies eine Folge der historischen Entwickelung der dortigen Gymnasien, bei denen auf den Oberklassen Logik, überhaupt Philosophie älteren Styls etc., andererseits das Arithmetische durchaus vorwalteten.

Steckel erzählt von den Beobachtungen, die er bei seinem Unterricht im 20 ▷
Osten hinsichtlich des Verhaltens dem mathematischen Lernstoff gegenüber bei Angehörigen verschiedener Rassen (Deutschen, Polen, Juden) gemacht zu haben glaubt. Die Deutschen rechnen $7\,{}^{1}\!/_{4} - {}^{3}\!/_{4}$ in der Form $= 7 - {}^{1}\!/_{2} = 6\,{}^{1}\!/_{2}$, erfassen also die Aufgabe anschaulich; die Juden rechnen $7\,{}^{1}\!/_{4} = \frac{29}{4}$, also $7\,{}^{1}\!/_{4} - {}^{3}\!/_{4} = \frac{26}{4} = 6\,{}^{1}\!/_{2}$, beziehen sich also auf die allgemeinen logischen Regeln. Die Polen neigen dazu, nur die Worte der mathematischen Regeln zu erfassen, wie sie denn auch im Sprachunterricht exzellieren.

Decoster gibt einige Bemerkungen über Bergson, insbesondere seine Auffassung der Zeit. Die Zeit sei nach Bergson ungleich dem Raume nicht homogen, sondern eine Aufeinanderfolge qualitativ verschiedener psychischer Zustände. Deshalb sei es ganz verkehrt, die Zeit mit dem Zahlbegriff in Verbindung zu bringen. Das Ziel der Psychophysik sei von vorneherein verkehrt. Eine Uhr zeige nicht die Differenz zweier Zeiten sondern zweier
Orte. 21 ▷

Klein beklagt die grosse Schwierigkeit, die bei Unterhaltungen über den allgemeinen Charakter mathematischer Leistungen darin liegt, dass die einschlägigen mathematischen Disziplinen den Zuhörern durchweg zu wenig bekannt sind.

Mit der Aufgabe, von der Eigenart des Lie'schen Genius ein Bild zu geben, wird er sich also in der Weise auseinandersetzen, dass er sich auf eine einzelne besonders charakteristische Leistung (die Linien-Kugeltransformation) beschränkt und hier zunächst gewisse Methoden oder Entwickelungen oder Denkweisen schildert, die Lie entwickelt vorfand. (Das Beispiel von Lie soll dabei zeigen, dass mathematische Produktion mit dem logischen Schliessen aus gegebenen Prämissen unter Umständen ausserordentlich wenig zu tun hat).

1. Die Benützung des sog. Kugelkreises beim Studium irgendwelcher metrischer Beziehungen geometrischer Figuren. – Der Kugelkreis wird definiert, an seine Benutzung beim Schnitt von Kugeln im endlichen, in der Theorie
der konfokalen Flächen 2. Grades erinnert. 22 ▷

[4*] *Sehen und Sprechen!*

Definition der Dupin'schen Zyklide (mit ihren kreisförmigen Krümmungskurven), der allgemeinen Zykliden ($= F_4$, die den Kugelkreis doppelt enthalten). Es gibt ein (von Darboux und Moutard 1867 entwickeltes) Orthogonalsystem aus allgemeinen Zykliden; daher sind die Krümmungskurven der letzteren algebraische Kurven achter Ordnung.

Bei diesen geometrischen Studien beruft man sich vielleicht einmal behufs logischer Rechtfertigung des Verfahrens auf die allgemeine Berechtigung, mit komplexen Grössen zu hantieren, vielleicht gar auf die Möglichkeit, alle Entwickelungen über komplexe Grössen in v. Staudtscher Weise geometrisch konkret zu deuten, aber in Wirklichkeit ist das gedankliche Verfahren ein anderes: man ersetzt zwischendurch den imaginären Kegelschnitt durch einen reellen, raisonniert an diesem, bemerkt dann wieder, dass der Kegelschnitt selbstverständlich imaginär sei, etc. Es ist ein Spiel mit Analogien des Reellen, welches vielmehr durch ein fein ausgebildetes Gefühl kontroliert wird, als durch eine kritische Verstandestätigkeit. Lie nannte eine derartige Methode 23 ▷
ein „Schliessen durch die Luft", also ein Fliegen, statt der mühsamen Vorwärtsbewegung an der Erdoberfläche.

Besonders amüsant ist die Betrachtung und Benutzung der geraden Linien, welche den Kugelkreis schneiden; sie haben die Länge Null und stehen auf sich selbst senkrecht (genauer: sie machen mit sich selbst Winkel *unbestimmter* Grösse). Die Franzosen nennen sie „droites isotropes", weil die Linien $y/x = \pm i$ bei Drehung der xy-Ebene um den Anfangspunkt fest bleiben (sie bilden mit allen anderen durch 0 laufenden Strahlen *unendlich grosse* Winkel $= \int \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$). Lie gebraucht in seinen späteren Publikationen das Wort „Minimallinien", für sich selbst und im Privatgespräch nannte er sie die „verrückten Geraden". 24 ▷

Sitzung vom 1. Dez. 1909.

Nelson gibt einleitende Bemerkungen über die Probleme der Entstehung der Raumvorstellung, bez. der räumlichen Axiome. Die grossen Meinungsverschiedenheiten scheinen darauf zurückzugehen, dass die fundamentalen Fragen nicht hinreichend deutlich geschieden werden. Man unterscheide:

a. Zeitliches Eintreten der Raumvorstellung in das Bewusstsein.

[Wenn die Fähigkeit der Raumvorstellung als a priori gegeben, d. h. als eine dem Menschengeiste ursprüngliche Fähigkeit angesehen wird, so kann sie darum doch durch besondere Anlässe erst ausgelöst werden. So etwa ist z. Z. die Meinung der meisten Psychologen. Dies schliesst nicht aus, dass die Fähigkeit der Raumvorstellung von der Gattung erst erworben ist (Spencer). Sehr instruktiv die Erfahrungen mit operierten Blindgeborenen. Sie müssen sich die Idee[5*)] der Entfernung wie der eigentlichen Gestalt erst aneignen, wozu bei verschiedenen Individuen Stunden oder Tage gehören. Sind die einschlägigen Beobachtungen wirklich so sicher?] 25▷

b. Die eigentliche Quelle der Raumanschauung

α. Alter Streit, ob es sich um Anschauung im engeren Sinne handelt, oder um Begriffliches (bei Kant, bei Leibniz). Der Streit ist nicht zu entscheiden, solange alle zu verwendenden Worte schwankende Bedeutung haben.

Die Psychologen unterscheiden übrigens jetzt allgemein (nach dem Vorgange von E. H. Weber) einen Gesichtsraum, einen Tastraum, einen motorischen Raum als anschauungsmäßiges Substrat. Wie aber kombinieren sich die zum „geometrischen Raum“? Sicher spielen Assoziationsempfindungen dabei mit, aber genügen diese zur Erklärung? E. H. Weber unterschied noch einen räumlichen Generalsinn.

β. Hat die Raumvorstellung als solche empirischen Charakter[6*)] oder ist sie apriorisch, d. h. eine dem Subjekt eigentümliche ursprüngliche Fähigkeit[7**)]? Man bemerke, dass bei aller Empirie eine Schwelle der Genauigkeit vorliegt, dass beobachtete Raumstücke immer nur endlich sind, 26▷
etc.

Was ist von Lotze's Theorie der Lokalzeichen zu halten, wonach die räumliche Empfindung wesentlich von der Stelle der Reizung abhängig ist?

Gibt es ⟨*eine*⟩ Vorstellung des leeren Raumes?

c. Die physiologischen Korrelate.

Cf. spezifische und sukzessive Entwickelung des menschlichen Gehirns. Die Rolle der 3 halbzirkelförmigen Kanäle etc. etc.

In der Debatte berührt Klein, dass nach Poincaré zunächst so viel Dimensionen des Raumes unterschieden werden sollen, als Nerven beim Individuum vorhanden sind, dass von da durch Assoziation die Idee[8*)] der Bewegungen im Raume entsteht und man dann auf gewisse geometrische Grundbegriffe, z. B. den Punkt, komme, indem man das Vorhandensein gewisser Untergruppen von Bewegungen konstatiert. Klein bezeichnet diese und andere Aperçus als mehr geistreich denn als zutreffend. Wie will man auch nur von einer 27▷
bestimmten Zahl von Nerven sprechen? *Bernstein* erklärt den Poincaré'schen

---

[5*)] *„Vorstellung“*
[6*)] *cf. Mill und Helmholtz*
[7**)] *cf. Kant*
[8*)] *Vorstellung*

Punktbegriff dahin, dass es natürlich sei, sich den Sitz des eigenen Selbstbewusstseins als einfaches Element zu denken und dieser bei den Drehungen des Kopfes in der Tat ungeändert zu bleiben scheine. *Bernstein* denkt sich das engere psychologische Problem der Entstehung der Raumvorstellung dahin begränzt, dass es nur von der gegenseitigen Beeinflussung der verschiedenen sinnlichen Apperzeptionen handele, während *Nelson* betont, dass damit der Kernpunkt der Fragestellung, das Hervorkommen der Raumvorstellung als solcher, überhaupt nicht getroffen sei.

Von der Absicht ausgehend, den Zuhörern die Liesche Entdeckung der Linien-Kugel Transformation inhaltlich verständlich zu machen, erzählt *Klein* dieses Mal von den *linien-geometrischen Arbeiten der deutschen Schule* (Plücker, andererseits Kummer, dann Klein selbst in seinen ersten Arbeiten). 28 ▷
Linienkoordinaten p_{ik} – Lineare Komplexe – Quadratische Komplexe. Die singuläre Fläche eines quadratischen Komplexes = Ort der Punkte, deren Komplexkegel in 2 Ebenen zerfällt, ist eine Kummer'sche Fläche 4. Ordnung und Klasse, mit 16 „Doppelpunkten" und 16 „Doppelebenen". Die einzelne Kummersche Fläche ist singuläre Fläche für ∞^1 quadratische Komplexe, unter denen sich doppeltzählend 6 lineare Komplexe befinden. Sie erscheint daher auch als Brennfläche von 6 in diesen linearen Komplexen enthaltenen Kongruenzen (1,2).

Vorzeigung zahlreicher Modelle von Kummer'schen Flächen (die sog. Plücker'sche Komplexfläche ist eine Ausartung, bei der eine Doppelgerade auftritt).

Ueberall muss man, um Uebersicht zu wahren, projektive Denkweise anwenden. Daher ist es natürlich, nicht etwa nach den Krümmungskurven der Kummer'schen Flächen zu fragen, sondern nach ihren Haupttangentenkurven. Einige Angaben über deren Verlauf. 29 ▷

Sitzung vom 8. Dez. 1909.

Uffrecht spricht über das Buch von König: „Kant und die Naturwissenschaften". Ihm scheinen die Grundlagen dort so wenig klar, dass er vorläufig ablehnen muß, endgültig darüber zu berichten.

Klein setzt sein Referat über Lie fort. Die Leistung von Lie, von der hier gehandelt werden soll, ist die Verbindung des französischen Ideenkreises betr. Benutzung des Kugelkreises für metrische Fragen und der deutschen Liniengeometrie durch die Berührungstransformation, welche gerade Linien und Kugeln zusammenordnet (Paris 1870).

Die allgemeinen Ideen, wie sie sich Lie später darstellten, lassen sich durch die Stichworte bezeichnen:

Begriff des „Elements“ ($x\ \ y\ \ z\ \ p\ \ q$). „Vereinigte Lage“ zweier benachbarter Elemente: $dz - p\,dx - q\,dy = 0$. Punkt, Kurve, Fläche als Spezialfälle der „Vereine“ von ∞^2 Elementen. 30 ▷

„Berührungstransformation“ = Elemententransformation, welche Vereine in Vereine überführt. Ausgedrückt je nachdem durch *eine* „aequatio directrix“, oder durch *zwei*, oder *drei*.

Die analytischen Formeln bez. Theoreme, durch welche diese Ideen exakt formuliert werden, sind im Grunde alle bereits in den alten Untersuchungen von Lagrange u. a. bis hin zu Jakobi über *kanonische Substitutionen* in der theoretischen Mechanik (der astronomischen Störungstheorie) enthalten. Indem aber Lie diese Ideen auf geometrische Weise wiederfand, gewannen sie bei ihm triebkräftiges Leben.

Die Linien-Kugeltransformation, auf die es schliesslich ankommt, ist an sich durch sehr einfache Formeln gegeben.
Man definiere die Gerade nach Plücker durch die Gleichungen $x = r\,z + \rho$, $y = s\,z + \sigma$, die Kugel durch $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$. Es genügt dann zu setzen:

$$r = \alpha + i\,\beta,\ \ \sigma = \alpha - i\,\beta,\ \ s = \gamma + R,\ \ \rho = -\gamma + R.$$

Die tief eingreifende geometrische Bedeutung dieser Transformation liegt 31 ▷
darin, dass sie imaginär ist. Was kann der naiven Anschauung, fragt Darboux, unähnlicher scheinen, als die Gesammtheit der Elemente, die sich an eine Gerade, und die Gesammtheit der Elemente, die sich an eine Kugel anschmiegt? Und doch sind sie vom Standpunkte einer allgemeinen Elemententheorie, die alle Variabelen komplexer Wertesysteme fähig nimmt, gleichwertig.

Dies will, wenn man das Ding wirklich verstehen will, ins einzelne überlegt sein. Was entspricht den „Elementen“ einer Geraden, die denselben Punkt oder die dieselbe Ebene enthalten? Die Kugel enthält zwei Schaaren von Minimallinien als Erzeugende und jenen Elementen entsprechen diejenigen Berührungselemente der Kugel, die sich längs einer Erzeugenden der einen oder anderen Schaar an einander reihen. Was entspricht den Elementen, welche die Kugel in den Punkten eines Kreises berühren? Bei der Geraden ein solcher Elementenstreifen, bei dem die Punkte und die Ebenen der Elemente 32 ▷
irgendwie durch eine projektive Zuordnung verknüpft sind.

Man arbeitet, indem man solche Sätze aufstellt und sie dann weiterhin selbst wieder zur Ableitung neuer Wahrheiten benutzt, sozusagen in einem Mittelgebiet zwischen Anschauung und Begriff.

(Fortsetzung folgt).

[Elementare Entwickelungen betr. die Linien-Kugeltransformation in der Ausarbeitung meiner Vorlesung über Kurven und Flächen vom Sommer

1907]. [Aber das Beste, die Zusammenhänge im Imaginären, habe ich damals in Anbetracht der Anlage meines Kollegs und der Zusammensetzung meiner Zuhörerschaft nicht auseinandersetzen können]. 33 ▹

Sitzung vom 15. Dez. 1909.

Errera beginnt sein Referat über die Untersuchungen der Physiologen betr. das Zustandekommen bez. die Sicherheit der Raumanschauung mit besonderer Zugrundelegung von *Nagel*, Handbuch der Physiologie des Menschen, Bd. III (Vieweg 1905):

Versuche von Delage u. a. betreffend die Lage im Raum, die Bewegung, den Widerstand. Bei veränderter Lage behält man ein leidliches Gefühl für die Vertikalrichtung, doch ist dasselbe stark durch die Haltung des Kopfes beeinflusst. Nach Mach empfindet man gleichförmige Translation überhaupt nicht; bei irgendwelcher gleich beschleunigter Bewegung (also auch bei gleichförmiger Drehung) stellt sich der Vertikalsinn in die Resultante von Schwere und Beschleunigung (Zentrifugalkraft). Vertikal- und Horizontalkreuz bei nach rechts geneigtem Kopf (und geschlossenen Augen): ⟨$\times$*-förmige orig. Abb.*⟩

Theoretische Folgerungen: Neben der diffusen Empfindung der inneren Organe scheint für die räumliche Orientierung hauptsächlich die Empfindung im Ohrlabyrith in Betracht zu kommen. Schwindelgefühl (Drehschwindel, im Gegensatz zu Höhenschwindel) scheint aus Konflikt der verschiedenen zusammenwirkenden Sinneseindrücke hervorzukommen. Vergl. Experimente 34 ▹
mit einem schwingenden Spiegel, der so gross ist, dass er das Gesichtsfeld fast ausfüllt (während der Beobachter ruht). Nur ganz wenige Personen werden dabei nicht schwindelig, wohl aber ein grosser Prozentsatz von Taubstummen (bei denen man eine Verkümmerung des Ohrlabyrinths voraussetzen kann).

(Fortsetzung folgt).

Klein beendet seine Vorträge über Lie.

Das Schöne bei der Linien-Kugeltransformation ist, dass sie nicht gleichgültige Ergebnisse liefert, sondern die *wesentlichen* Probleme der metrischen (französischen) Geometrie mit denjenigen der (deutschen) Liniengeometrie in Verbindung bringt. Zunächst bekannte Dinge: hier und dort die doppelte Eingrenzung des Hyperboloids durch gerade Linien mit der doppelten Umhüllung der Dupin'schen Zyklide durch Kugeln. Die Kummer'sche Fläche (als Brennfläche der Kongruenz (2,2) des Linienraums) mit der allgemeinen Zyklide. Nun aber Neues (bis dahin Unbekanntes). Indem man die 35 ▹
Krümmungskurven der allgemeinen Zyklide als algebraische Kurven 8. Ordnung kennt, ergeben sich die Haupttangentenkurven der Kummer'schen Fläche als algebraische Kurven 16$^{\underline{\text{ter}}}$ Ordnung!

[Vom Punktstandpunkte stellt sich die Lie'sche Transformation so dar, dass jedem Punkte des Kugelraumes eine Gerade des linearen Komplexes $s + \rho = 0$ entspricht, jedem Punkte des Linienraumes eine Minimalgerade. Eine bestimmte Gerade des Linienraumes ist bei der Abbildung singulär (es entsprechen ihr die sämmtlichen ∞-fernen Punkte des Kugelraums), ebenso im Kegelschnitt des Kugelraums, nämlich der „Kugelkreis".]

Wie hat nun Lie diese Theorien gefunden? Das ist die psychologische Frage, die hier interessiert. Folgende aeussere Daten:

1. Jugend auf dem Lande, normales Universitätsstudium in Christiania.
2. Mehrere Jahre ohne rechte Beschäftigung als Privatlehrer. Unterrichtliche Elementarinteressen. Daneben allerlei Wunderlichkeiten. Exzessive Wanderungen, körperliche Kraftleistungen. 36 ▷
3. Mit 25 Jahren zufälliges Bekanntwerden mit den geometrischen Schriften von Plücker und Poncelet. Entschluss, selbst geometrisch zu arbeiten, und starke Überzeugung, dass dies gelingen müsse.
4. Erster Versuch mit einer an sich trivialen Fragestellung: Deutung des Imaginären der Plangeometrie, indem für $x = \xi + i\,\eta$, $y = \zeta + i\,\tau$ ein Raumpunkt ξ, y, ζ mit dem „Gewichte" τ gesetzt wird. Hierbei entstehen allerlei interessante Beziehungen u. a. die Abbildung des linearen Komplexes auf den Punktraum, innerhalb dessen ein Fundamentalkegelschnitt liegt. (Diese Abbildung kurz vorher von Nöther in den G. N. publiziert).
5. Nun greift der Zufall (der Einfluss des Milieus ein), indem Lie mit Stipendium für den Winter 1869/70 nach Berlin kommt und dort durch Klein die deutsche Liniengeometrie kennen lernt.
6. Entsprechender Zufall, dass Lie mit Klein für den Sommer 1870 nach Paris geht, wo der Kugelkreis und die sich anschliessenden Probleme an der Tagesordnung sind. 37 ▷
7. Wie kommt nun Lie darauf, jenen Fundamentalkegelschnitt, der bei Abbildung des linearen Komplexes entsteht, in den Kugelkreis zu verlegen und sich für Wochen und Monate unablässig in die dadurch entstehenden Beziehungen zu vertiefen? „Der gute Mensch in seinem dunklen Drange ist sich des rechten Weges stets bewusst". ⟨*J. W. Goethe: Faust, Erster Teil der Trilogie*⟩ (Lie sagte später: ich habe lange Zeit in den beiden Räumen neben einander „gelebt").
8. Eines Morgens früh 7 Uhr ruft Lie mich in sein Zimmer (wo er noch im Bett lag) und erzählt mir in aufgeregter aber mir trotz aller Uebung völlig unverständlicher Weise, dass Krümmungskurven in Haupttangentenkurven übergehen und dass die H. K. der Kummerschen Fläche dabei als algebraische Kurven 16. Ordnung herauskommen.

9. Ich verstand das weder, noch glaubte ich es, bemerkte aber unter Tags, dass die H. K. der Kummer'schen Fläche mit Kurven 16. Ordnung zusammenfallen, die ich schon von meinen liniengeometrischen Untersuchungen kannte und deren Attribute, Klasse, Rang, Singularitäten, 38 ▷ Verlauf im Reellen ich genau bestimmen konnte. Als ich Lie am Abend davon erzählte, antwortete er gereizt: ich habe doch erzählt, dass es Kurven 16$^{\underline{\text{ter}}}$ Ordnung sind. Er war also trotz der Ungeordnetheit seiner Darlegungen von deren innerer Richtigkeit völlig überzeugt gewesen.
10. Wir sehen hier nicht etwa ⟨*einen*⟩ bestimmten Plan der Arbeit nach vorweg festgelegtem Ziel. Auch tritt alles Verstandesmässige stark zurück: Lie hatte relativ geringe Kenntniße und ganz und gar nicht, wie man es heute postuliert, exakte Grundbegriffe, er operierte auch nicht etwa analytisch. Starker innerer Trieb zur Produktion innerhalb der durch das Milieu gegebenen Möglichkeiten, bez. Anregungen! Es ist, wie bei jeder anderen Produktion: „Der Wind bläset, wo er will, und Du hörest sein Sausen wohl, aber Du weisst nicht, von wannen er kommt und wohin er führt. Also ist ein Jeglicher, der aus dem Geiste geboren ist". ⟨*Joh. 3:8*⟩ 39 ▷

Sitzung vom 22. Dez. 09.

Errera beendet sein Referat über die physiologischen Korrelate der Raumanschauung:

Beschreibung des Ohrlabyrinths. Die 3 Bogengänge liegen nahezu in 3 zueinander rechtwinkeligen Ebenen (der eine in horizontaler Ebene, die beiden anderen gegen die sagittale Richtung um 45° geneigt). Endolymphe im Inneren, Sinneshaare, an ihren Spitzen kleine Kalkkörperchen.

Die Bedeutung der Bogengänge wurde 1828 von Flaurens (Paris) entdeckt, 1870 von Goltz (Strassburg) wieder aufgenommen = Gleichgewichtsorgan, 1892 Ewald (ebenfalls Strassburg).

Erfahrungen an Tauben und Fröschen, deren Bogengänge zerstört wurden. Merkwürdige Drehungen und Pendelbewegungen. Ebenso an Krebsen, denen man aus ihrem rudimentären, von aussen zugänglichen Ersatzorgan die kleinen Steinchen entfernte.

Theorie von Mach und Breuer, wonach der Stoss der Endolymphe auf die mit den Otolithen beschwerten Sinneshaare das Entscheidende sein soll. 40 ▷

Cyon hat die Versuche weitergeführt, zugleich aber die Theorie ins Phantastische ausgesponnen. Die Bogengänge sind nach ihm das Organ der Euklidischen Geometrie, die Schnecke das Organ der Zahl, aus dem Zusammenwirken der beiden die Auffassung der Zeit!

Schliesslich sind die Bogengänge doch nur eines der Organe, die in uns die Raumvorstellung auslösen, bez. näher fixieren. Die Augen und Augenmuskeln (Hering in Hermann's Physiologie), das Gehör und natürlich Tast- und Bewegungsempfindungen kommen daneben in Betracht. Die Ansicht der modernen Physiologen geht überwiegend dahin, dass diese verschiedenen Sinneswahrnehmungen im Kleinhirn zur Raumvorstellung verarbeitet werden.

[Prof. Bernstein berichtet über die merkwürdige Beobachtung von Urbantschitsch in Wien, dass Einspritzungen in das Labyrinth Orientierungsveränderungen im Sehfeld hervorrufen können.] 41 ▷

Sitzung vom 19. Januar 10.

Bernstein berichtet über den Entwickelungsgang und die Eigenart von Georg Cantor. Cantor bezeichnet sich selbst im Gegensatz zu Dedekind, den er als typischen Logiker ansieht, als Intuitionisten. Er glaubt an die Objektivität der mathematischen Dinge und fühlt sich ihnen gegenüber also nicht als Erfinder sondern als Entdecker. Seine neuen Ideen sind immer aus der Beschäftigung mit konkreten Problemen entstanden: die Frage der Abzählbarkeit von Mengen aus der Untersuchung des identischen Verschwindens der trigonometrischen Reihen, die transfiniten Zahlen bei der Betrachtung der successiven Ableitungen einer irgend gegebenen Punktmenge. Auf der einen Seite die rückhaltlose Bewunderung der mathematischen Möglichkeiten (Cantor vergleicht eine „Menge“ mit einem Abgrund, Dedekind mit dem Inhalt eines Sacks), auf der anderen Seite aber volle Klarheit der Begriffe und eine starke Gabe des Systematisierens. Die algorithmische Mathematik liegt ihm ganz fern. Von hier z. B. starke Abneigung gegen 42 ▷
Peano. Und auch du Bois, mit dem er in früheren Jahren viel wissenschaftlich verkehrte, war ihm wegen der Unbestimmtheit seiner Auffassungen unsympathisch. – In philosophischer Hinsicht bezeichnet sich C. gern als Leibnizianer. Aber auch die Scholastiker mit ihrem systematischen Begriffsaufbau hat er eifrigst studiert. Weitgehendes Interesse für alle literarisch-historischen Fragen, sehr viel geringeres für das Naturwissenschaftlich-Technische. 43 ▷

Sitzung vom 26. Januar 1910.

Steckel berichtet über *Brandford*⟨Branford⟩, A Study of mathematical education and the teaching of arithmetic, Oxford 1908, und *Mair*, A School course of Mathematics, Oxford 1907. (Die beiden Bücher stehen in Abhängigkeit. *Branford*'s Buch ist aus Vorträgen entstanden, in denen er mehr allgemeine Gesichtspunkte gab; das Buch von *Mair* versucht eine lehrplanmässige Ausgestaltung. Dabei ist aber nicht etwa an eine organisierte Schule, wie unsere Volksschule gedacht, sondern an den Unterricht eines einzelnen Kindes, bei dem man so lange bei dem einzelnen Gegenstande verweilen kann, bis das Kind ihn wirklich verstanden hat).

Die Grundauffassung bei Branford ist, dass das Kind mehr oder minder dieselben Stufen der Erkenntniß zu durchlaufen habe, die das menschliche Geschlecht tatsächlich in seiner Entwickelung durchlaufen hat (Biogenetisches Grundgesetz). Er unterscheidet dabei die „empirische“, die „systematische“ und die „ästhetische“ Stufe. Allemal wird nicht mit Grundsätzen begonnen, die dem Kinde von aussen eingeprägt werden, sondern mit Problemen, die es von sich aus löst. Diese Probleme knüpfen immer an den beim Kinde ohnehin 44 ▷
vorhandenen Vorstellungsinhalt an.

Z. B. Beginn der Geometrie: welche Marken muß ich mir auf einem Hofe machen, um die Stelle, an der ich einen Schatz vergraben habe, wiederzufinden?

Satz vom Peripheriewinkel im Kreise: Gefahrwinkel bei 2 Leuchttürmen (der Lage etwelcher Klippen entsprechend).

Beginn der Kombinatorik: Signalisieren durch Morsezeichen.

Dieses System des Unterrichts wird von den Erfahrungen getragen, welche Versuche mit heranwachsenden Kindern tatsächlich ergeben haben. Es zeigte sich, dass die Fähigkeit, abstrakte Formulierungen aufzufassen oder auch nur gelten zu lassen, sehr viel geringer ist, als der Erwachsene vermutet. Z. B. wird zugegeben, dass zwei Strecken, welche gleich viel Zentimeter lang sind, sich zu decken vermögen, während der Satz, dass zwei Größen, die einer dritten gleich sind, auch unter einander gleich sind, auf Ablehnung stösst.

Nelson bemerkt, dass bei dem Elementarunterricht, den die Studierenden in Charlottenburg u. anderwärts jetzt für Arbeiter in Rechnen und Raumlehre erteilen, sich spontan, also ohne Kenntniß der bereits vorliegenden 45 ▷
Literatur, sich ähnliche Erfahrungen und Ansätze entwickelt haben.[9*)]

Bernstein bemerkt, dass die ersten zusammenhängenden math. Volkshochschulkurse wohl 1829 von *Dupin* in Paris gehalten worden sind, im Anschluss an eine Reise nach England, bei der D. die dortigen Arbeiterverhältnisse studierte.[10**)]

Klein erzählt von einer charakt. Erfahrung, die Brill s. Z. gemacht hat, als er zu Anfang seiner wissenschaftlichen Karriere in Berlin an einer Handwerkerschule über die Kongruenzsätze vortrug. Ein Schüler antwortete ihm: Dreiecke sind doch immer kongruent! Er kannte als Dreiecke nur die käuflichen Holzstücke, die man beim Zeichnen an seiner Schule für die geometrischen Konstruktionen anwendete.

[9*)] ⟨*fehlt im Original*⟩

[10**)] *Näheres in Poggendorffs Lexikon.*

Als Vorbemerkung zu weiteren Vorträgen über mathematische Pädagogik stellt *Klein* folgendes Entwickelungsschema auf:

46 ▷

1. Die überkommene scholastische Pädagogik, welche die Kinder die Sätze eines systematischen Lehrbuchs, z. B. des Euklid, der Reihe nach lernen lässt.
2. Pestalozzis Grundgedanken, dass jeder naturgemässe Anfangsunterricht an die kindliche „Anschauung" anzuknüpfen habe, systematisiert von Herbart und von dessen Schülern, wie Ziller (Leipzig), Stoy (Jena), etc. in den Einzelheiten ausgearbeitet. Der Ausgangspunkt ist, was Herbart „Psychologie" nannte. Das Herbart'sche System herrscht noch durchweg an den Volksschulen, bez. bei der Mehrzahl der Volksschulpädagogen. Hierüber wird vorzutragen sein.
3. Die „neue Schule" der beobachtenden und experimentierenden Pädagogik (bez. Psychologie).

   Gesellschaften: für experimentelle Psychologie, Vorsitzender G. E. Müller. Bis jetzt Kongresse Giessen 1904, Würzburg 1906, Frankfurt 1908, demnächst 1910 Innsbruck.

   Einmaliger Kongreß Berlin 1906 für Jugendforschung und Jugendfür- 47 ▷
   sorge (1906). Jahresbericht Langensalza 1907.

   Institut für angewandte Psychologie und psychologische Sammelforschung, von Baade, Lipmann und Stern (Neubabelsberg).

   Experiment. Institut von Brahn in Leipzig, begründet und unterhalten vom sächsischen Lehrerverein.

   Zeitschrift für experimentelle Pädagogik von Meumann (Münster, jetzt Halle).

   Zeitschrift für pädagogische Psychologie, von Brahn, Deuchert etc.

   Lehrbücher. Neben Meumann (⟨*fehlt*⟩) stellt sich z. B. Rud. Schultze. Aus der Werkstatt der experimentellen Psychologie und Pädagogik, Leipzig 1909.

   Alles dieses bezieht sich nur auf das Auftreten der „neuen Schule" in Deutschland. Der deutsche Lehrerverein (Vorsitzender Lehrer Rühl in Berlin) hat neuerdings eine Pädagogische Zentralstelle eingerichtet (Vorsitzender Fortbildungsschuldirektor Haumann in Berlin) und diese hat in ihrer Sitzung vom 29. Dez. 1909 den von Dr. Brahn entwickelten Plan
   einer „pädagogischen Akademie" gutgeheissen, d. h. einer gesonderten, 48 ▷
   mit einer größeren Zahl von Lehrkräften besetzten Anstalt, in welcher die gesammten Fragen der modernen Pädagogik so lange eine systematische Vertretung finden sollen, als diese an den Universitäten nicht genügende
   Vertretung finden. 49 ▷

Sitzung vom 2. Febr. 1910.

Behrens berichtet über *Meumann*, experimentelle Pädagogik (2 Bände).

Die experimentelle Pädagogik ist eine Wissenschaft, die sich erst in ihren Anfängen befindet; man muss zufrieden sein, vorläufige Formulierungen zu finden, die noch keineswegs zur praktischen Nutzanwendung ausreichen.

Meumann behandelt u. a. die allgemeine Frage, wie man die *Begabung* eines normalen Kindes charakterisieren könne. Die Genauigkeit der Empfindungen erscheint ihm ziemlich gleichgültig, wichtiger schon die Stärke des Gedächtnisses. Er richtet sein Interesse durchaus auf den Intellekt (hinter dem ihm der Willen, überhaupt die ethischen Qualitäten zurückstehen). Hier unterscheidet er dann Typen

a) der Anschauung, ob beschreibend (die Einzelheiten erfassend) oder beobachtend (umfassend),

b) der Aufmerksamkeit, ob fixierend (intensiv aber eng) oder fluktuierend,

c) der Vorstellung. Man kann Sachvorstellungen und Wortvorstellungen
unterscheiden, andererseits die Attribute visuell, auditiv und mo- 50 ▷
torisch. Sachvorstellungen sind wesentlich visuell, Wortvorstellungen mehr auditiv, bez. motorisch.

Im Kindesalter erscheinen diese Typen noch beeinflussbar, später sind sie fixiert. Im Kindesalter prävalieren die Sachvorstellungen, beim Erwachsenen die Wortvorstellungen.

[Klein vergleicht die beiden Vorstellungsarten mit den Verfahren der synthetischen und der analytischen Geometrie. Er selbst folgt der 'méthode mixte', d. h. er hat fortgesetzt die geometrischen Figuren vor Augen, aber bedient sich für die Schlüsse der Analysis].

Meumann bespricht des ferneren besondere Gebiete des Unterrichts:

a. Anschauungsunterricht, auf Grund von Demonstration und Aussageexperiment. Bis zum $8^{\underline{\text{ten}}}$ Lebensjahr herrscht das „Substanzstadium", vom $8^{\underline{\text{ten}}}$ bis zum $9^{\underline{\text{ten}}}$ das „Aktionsstadium" (wie wirken die angeschauten Dinge auf einander?), vom $9^{\underline{\text{ten}}}$ bis zum $11^{\underline{\text{ten}}}$ das „Relationsstadium" und von da
ab das „Qualitätsstadium". 51 ▷

b. Lesenlernen. Gegenstand, bez. Wortbild sollen mit bestimmtem Schriftbild assoziiert werden. Man unterscheidet 1) die *synthetische* Unterrichtsmethode, welche die Worte aus den Buchstaben zusammensetzt, 2) die *analytische*, die das Wort in Lautkomplexe zergliedert und für diese Schriftzeichen einführt. Nr. 1 kann buchstabierend gehandhabt werden (K=„Ka") oder lautierend (K= K'). Diese Lautiermethode ist jetzt beim Anfangsunterricht wohl allgemein üblich. Nr. 2 charakterisiert die Art, wie der Erwachsene tatsächlich liest, ist aber für den Anfang zu ungenau. Cf. Ei.

Von der Augenbewegung beim Lesen, von der Bedeutung des indirekten Sehens etc.

c. Schreibenlernen. Zuerst eine „künstliche“ Handschrift, später eine „natürliche“, die mehr vom Verlaufe der Gehirnprozesse als von der schreibenden Hand abhängig scheint. Bei letzterer fliessen die einzelnen Buchstaben ineinander.

Vom zeitlichen Verlauf des Drucks beim Schreiben (graphisch dargestellt). 52 ▷

c. ⟨d.⟩ Einprägen der Zahlen. Soll es graphisch geschehen durch Nebeneinanderstellen identischer Zeichen, z. B. ||||, oder durch Auszählen, mit Fixierung der Stelle durch die Ziffer (z. B. 3)? Das entspricht sozusagen der Unterscheidung von Kardinalzahl und Ordinalzahl. Grössere Zahlen werden am besten durch quadratische Schemata erfasst:

$$\begin{array}{c|cc|cc|cc|ccc|c} \mathrm{o} & \mathrm{o} & \mathrm{o} & \mathrm{o} & \mathrm{o} & \mathrm{o} & \mathrm{o} & \mathrm{o} & \mathrm{o} & \mathrm{o} & \dots \\ & & & \mathrm{o} & & \mathrm{o} & \mathrm{o} & \mathrm{o} & \mathrm{o} & & \end{array}$$

Übrigens tritt das verständnisvolle Erfassen der Zahlen erst relativ spät ein; das Kind hat neben den auswendig gelernten Worten zunächst nur das unbestimmte Gefühl der Vielheit.

d. ⟨e.⟩ Zeichnen (mit dem Stift). Woher gibt es so sehr viele schlechte Zeichner (zunächst bei Zeichnen aus der Erinnerung)? Verschiedene Gründe können in Betracht kommen: Ungenaues Sehen, ungenaue Reproduktion des Gesehenen in der Vorstellung, Ungeschicklichkeit der Hand schlechtweg (man lasse Kreise oder gerade Linien zeichnen), ungenaue Assoziation zwischen der 53 ▷
Vorstellung und der Tätigkeit der Hand.

Man sieht, dass die soweit gewonnenen Grundlagen noch keineswegs für die Aufstellung einer bestimmten (ev. dem Individuum angepassten) Methodik des Rechenunterrichts oder des Unterrichts in der Raumlehre ausreichen. Als Ziel aber müssen wir festhalten, dass alle Aufgaben des mathematischen Unterrichts bis hin zum Hochschulunterricht experimentell pädagogisch durchgearbeitet werden! 54 ▷

Sitzung vom 9$^{\underline{\text{ten}}}$ Febr. 1910.

Freundlich berichtet über *Pestalozzi*'s A.B.C. der Anschauung und *Herbart*'s zugehörige Schrift: Pestalozzis Idee untersucht und wissenschaftlich ausgeführt (1802).

Pestalozzi lässt das Zerlegen von Strecken und Quadraten in kongruente Teilstrecken resp. Teilquadrate auf alle Weisen bis zur Übermüdung ausführen. Herbart setzt an Stelle des Quadrats als Grundfigur aller geometrischen Anschauung das Dreieck. Es komme darauf an, alle möglichen

Gestalten von Dreiecken begrifflich zu erfassen und alle anderen Figuren durch Zusammenstellung geeigneter Dreiecke sich klar zu machen.

Daher zuerst Konstruktion rechtwinkliger Dreiecke mit Winkeln von 5°, 10°, 15°, etc. Ablesung ihrer Seitenlängen an Hornplättchen. Zusammensetzung allgemeiner Dreiecke aus diesen Grunddreiecken.

Die Kinder haben die Maassverhältnisse, die so gewonnen werden, sich gedächtnißmässig einzuprägen. Aber es ist gut, wenn sie so früh wie möglich schon sich die Figuren aeusserlich einprägen. Man soll ihnen schon in der
Wiege die Grunddreiecke und anderes vor die Augen stellen. 55 ▷

Der Unterricht in Geographie und Astronomie geht später darauf hinaus, auf der Erd- oder Himmelskarte die Hauptpunkte durch Dreiecke zu verbinden und diese Dreiecke je an die richtige Stelle der vorher gewonnenen Dreieckstabelle zu rubrizieren!

Wie haben nun diese Ideen Herbarts im Rahmen seiner allgemeinen psychologisch-pädagogischen Ideen an den Volksschulen nachgewirkt? Es ist das darum so schwer zu erkennen, weil die methodischen Darstellungen der Enzyklopädien die Fragen des mathematischen Unterrichts höchstens ganz beiläufig erwähnen.

Klein bringt einen neuerlichen Aufsatz von *Th. Lessing* zur Sprache, in welchem dieser den Unterschied des abstrakt mathematischen und des spezifisch naturwissenschaftlichen (intuitiven) Denkens urgiert und für eine reinliche Scheidung der beiden Gedankenspähren einzutreten scheint. Dann würden also Leistungen, wie sie Helmholtz vollzogen hat — oder auch Archimedes, Newton, Gauß (um nur die Größten zu nennen) — zur Seite geschoben
sein. Wir Anderen haben immer geglaubt, dass ein wesentlicher Teil der 56 ▷
Kulturmission der Mathematik darin liege, das von aussen herankommende Material denkend umzuarbeiten, – dass die Mathematik selbst von da aus die wirksamsten Impulse erhalte. Jedenfalls kann die Mathematik nur im Bunde mit dieser Auffassung an der Schule wie der Hochschule ihre weitreichende Geltung festhalten, und es ist nicht zu verstehen, dass ein Dozent der Philosophie und Pädagogik an einer technischen Hochschule die umgekehrte Taktik empfiehlt. Wenn Lessing in dem Verhalten Kleins den praktischen Fragen gegenüber und dem Umstande, dass Klein über Nichteuklidische Geometrie gearbeitet hat, einen Widerspruch findet, so kann man nur annehmen, dass er die Arbeiten Kleins über Nichteuklidische Geometrie nicht gelesen hat. Besagte Arbeiten laufen in der Tat darauf hinaus, die Nichteuklidische Geometrie als etwas Einfaches und Anschauliches zu erfassen, ja zu einer bequemen Methode bei allgemeineren mathematischen Auffassungen auszubilden. Uebrigens nimmt Lessing die eigentliche, abstrakte Mathematik insbesondere
für das Judentum in Anspruch. 57 ▷

Der Unterschied und die Wechselbeziehung zwischen mathematischem und naturwissenschaftlichem Denken ist nicht mit wenigen Sätzen festzulegen. Klein verweist dieserhalb insbesondere auf seine autographierte Vorlesung von 1901: Anwendung der Diff. u. Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien (nämlich besagter Anwendung).

Noch sei bemerkt, dass die Unterrichtskommission der Ges. Deutscher Naturforscher und Aerzte in ihrem abschliessenden Bericht (1907) widerrät, beim Universitätsstudium Mathematik und sämmtliche Naturwissenschaften zu kombinieren. Sie empfiehlt vielmehr zwei getrennte Kombinationen:

a. Mathematik mit Physik, mit etwas Chemie,
b. Chemie und Biologie, mit etwas Physik. 58 ▷

Sitzung vom 16. Februar 1910.

Klein erstattet einen vorläufigen Bericht über die Entwickelung und den gegenwärtigen Stand der Methodik des Unterrichts in Rechnen und Raumlehre an den Deutschen Volksschulen (vergl. die Lehrbücher von Rude, 1904, und von Gehrig, 1906); Hr. Freundlich wird darauf demnächst ausführlicher zurückkommen. Das Merkwürdige ist, dass mit dem Betriebe an den höheren Schulen auch da, wo es stofflich geboten wäre, gar kein Zusammenhang zu bestehen scheint. Umgekehrt weiß auch Höfler in seiner Didaktik des math. Unterrichts (1909) gar nichts von der methodischen Literatur der Volksschulen. Natürlich sind auch die Lehrbücher, aus denen die Volksschullehrer ihre Kenntniß der Elementarmathematik schöpfen, ganz andere als die, die wir kennen. In erster Linie stehen Burkhard's Unterrichtsbriefe (Gera), das ausführliche Lehrbuch der Elementarmathematik von Lübsen (Leipzig) und die Enzyklopädie der gesammten mathematischen Wissenschaften von 59 ▷
Kleyer (Stuttgart, bez. Bremerhaven). Das Auffälligste ist, dass diese Werke alle ausserordentlich teuer sind. Z. B. kosten die für den Selbstunterricht in Arithmetik und Algebra bestimmten Kleyer'schen Hefte insgesammt 60 M!

Bernstein entwickelt Ideen über eine psychologische Untersuchung verschiedener Typen von Mathematikern. Der Stoff, über den der einzelne Mathematiker arbeitet, sei weniger durch die Art seiner Begabung als durch den Bildungsgang und die allgemeine Zeitrichtung bestimmt. Sehr wichtig sei — in der Mathematik wie in allen geistigen Gebieten — die Unterscheidung zwischen konstruierenden Naturen (vergl. Schiller, Kant, Plato) und beobachtend-Kombinierenden (cf. Goethe, Hegel, Aristoteles). Bei Mathematikern der ersten Art sei vielleicht $^3/_4$ Logik und $^1/_4$ Phantasie, bei denen der anderen Art $^1/_4$ Logik und $^3/_4$ Phantasie. Aber diese Unterscheidung durchkreuzt sich mit Gegensätzen anderer Art, cf. Systematiker und Aphoristiker, sukzessives Vorgehen und Intuitives, Einseitigkeit und Vielseitigkeit, 60 ▷

Deduktion und Empirie. Diese Bemerkungen wollen nur erste Ansätze zur Bearbeitung eines wichtigen Gebietes sein. Erst wenn man da klar sähe, könne man hoffen, wirkliche Mathematiker-Biographien zu schreiben. 61 ▷

Sitzung vom 23. Febr. 1910.

Freundlich berichtet über die wesentlichen Züge der auf *Herbart* zurückgehenden und von *Ziller* in bestimmte Formen gebrachten an unseren Volksschulen herrschenden Unterrichtsmethodik (siehe Ziller 1876: Vorlesungen über allgemeine Pädagogik, Leipzig, siehe auch z. B. Matzat: Methodik des geograhischen Unterrichts, Berlin 1883, wo Volksschulen und höhere Schulen neben einander betrachtet werden).

Vorausgeschickt muß werden, dass das Prinzip der „Lückenlosigkeit", welches Pestalozzi in seinem A.B.C. der Anschauung aufstellte, und dem sich Herbart damals mit seiner Aufzählung der „Normaldreiecke" anschloss, gänzlich verlassen ist.

Charakteristisch ist vielmehr eine Gliederung des Unterrichts in allen Fächern nach gewissen Stufen (Formalstufen), die Herbart bez. Ziller auf systematische Psychologie stützen:

I. Erwerbung der Kenntniße.

  1. Gewinnung von Einzelvorstellungen
     a. Analyse der bereits vorhandenen E.
     b. Erfassung neuer E. durch „Synthese"

(w.) ⟨*Bitte wenden!*⟩ 62 ▷

  2. Verarbeitung der Einzelvorstellungen
     a. Bildung von Begriffen (Assoziation)
     b. Ausscheidung des Unwesentlichen (System)

II. Anwendung der Kenntniße (womit der erziehliche Zweck des Unterrichts, oder, wie Herbart sagt, sein ethischer Zweck, der eine Willensrichtung einschliesst, erreicht wird).

Dabei soll sich der Unterricht um gewisse Mittelpunkte (Konzentrationsstoffe) gruppieren.

Wie ist das nun in den einzelnen Fächern, insbesondere für Rechnen und Raumlehre durchgeführt?

Wie weit sind in den letzten Jahren neue Tendenzen hervorgetreten? (Cf. moderner Zeichenunterricht, – cf. das Prinzip der Selbsttätigkeit)?

Was bedeutet experimentelle Psychologie und physiologische Psychologie?

Hat die Volksschulmethodik auf die neueren Unterrichtstendenzen an den höheren Schulen eingewirkt? 63 ▷

Nelson gibt einige Erörterungen über die Einordnung der Mathematik in das System der Wissenschaften. Unterscheidet man:

Gegenstand	*Methodik*	*Erkenntnißquelle*
so sind alle Autoren vor Kant darin einig,		für die Mathematik anzugeben:
Lehre von den Grössen	*syllogistisch*	*blosses Denken (Logik)*
Kant setzt statt dessen		
Raum und Zeit (wobei das Verhältnis von Zahl und Zeit unklar bleibt)	*dogmatisch*	*reine Anschauung = Konstruktion der Begriffe, also ein Drittes neben Denken und Empirie.*

Im $19^{\underline{\text{ten}}}$ Jahrhundert wogt im wesentlichen ein Streit, ob die mathematische Erkenntniß der Logik oder der Erfahrung entstammt. Die Nichteuklidische Geometrie lässt Vielen die Geometrie geradezu als Naturwissenschaft erscheinen. Stuart Mill und Mach sehen auch als Grundlage der Arithmetik die Erfahrung an. 64 ▷

Sitzung vom 2. März 1910.

Fortsetzung der Unterhaltung über die Stellung der Mathematik im System der Wissenschaften:

1. In der „Kultur der Gegenwart“, Herausgeber *Hinneberg*, sind die ersten beiden Teile den „Geisteswissenschaften“ gewidmet, dann folgt ein Teil für Mathematik, Naturwissenschaft und Medizin, endlich ein Teil für die technischen Kulturgebiete. Diese Einteilung ist nicht als Resultat systematischer Überlegung, sondern als blosser Reflex der an den deutschen Hochschulen herrschenden Verhältnisse anzusehen.

2. In dem für die wissenschaftlichen Kongresse bei der Weltausstellung in *Saint-Louis* (1904) ausgegebenen Programm, das von *Münsterberg* herrührt, erscheinen Philosophie und Mathematik als „normative Wissenschaften“ an die Spitze gestellt, es folgen die historischen W., die Naturwissenschaften und die „Geisteswissenschaften“ im engeren Sinne, nämlich Psychologie und Soziologie, endlich die praktischen Wissenschaften. Es handelt sich hier 65 ▷
um Nachwirkung der Ideen von Rückert und Windelband, die selbst mehr oder minder an Fichte's Wissenschaftslehre (also jedenfalls an die klassische Periode der Deutschen Philosophie) anknüpfen.

3. In Frankreich wirkt das $19^{\underline{\text{te}}}$ Jahrhundert hindurch die Tradition der Enzyklopädisten nach (d'Alembert, Condorcet). Besonders zu nennen auch *Ampère* und *Comte*.

a. Ampère hat ein ganz schematisches nach dichotomischer Methode gearbeitetes System (1834), bei dem er in erster Linie (nach dem Gegenstande der Wissenschaft)

Kosmologie und Noologie

entgegenstellt. Die Mathematik gehört bei ihm unter die „eigentliche Kosmologie", rubriziert also nach ihrer naturwissenschaftlichen Anwendung, die Philosophie gehört zur anderen Seite unter die Gruppe „eigentliche Noologie".

b. Ganz anders *Comte* (1830). Alle Kenntniße durchlaufen nach ihm dreierlei Stadien: das dogmatische, das metaphysische und das wissenschaftliche. Nur ein Teil unserer Kenntniße ist bereits in das wissenschaftliche Stadium eingetreten. Comte trennt sie in abstrakte und konkrete, und unterscheidet bei den ersteren nach dem Prinzip, dass jede folgende Disziplin von den vorangehenden abhängig ist: 66 ▷

Mathematik, Mechanik, Physique céleste, Physik, Chemie, Biologie, Soziologie.

[Psychologie ist hier absichtlich weggelassen, weil damals noch nicht in „wissenschaftlicher Form" vorhanden; Logik wird auf die genannten Disziplinen verteilt; Philosophie in allgemeinerem Sinne gehört unter Biologie und Soziologie].

4. Von englischen Systematikern sei *Spencer* genannt, der in Wechselwirkung mit den Ideen Darwins überall den Entwickelungs⟨ge⟩danken voranstellt (1870). Er unterscheidet a.) abstrakte Wissenschaften (die von den Formen der Phänomene handeln), b.) abstrakt-konkrete Wissenschaften (von den allgemeinen Eigenschaften der Dinge), c.) konkrete Wissenschaften (die Lehre von den Dingen selbst). 67 ▷

Zu a. gehören Logik und Mathematik, zu b. Mechanik, Physik und Chemie, zu c. Astronomie, Geonomie, Biologie, Psychologie, Soziologie. (Letztere beiden, Psychologie und Soziologie, sind so umfassend gedacht, dass sie die historisch-sprachlichen Gebiete mit einschliessen).

5. *Wundt* (um 1885) erscheint als Eklektiker. Nach längeren Erwägungen nimmt er als Haupteinteilung

I. Philosophie II. Einzelwissenschaften

Unter II nimmt dann die Mathematik eine besondere Stellung ein, weil ihr Wesen (nach G. Cantor) auf der Freiheit beruhe. Andererseits werden Naturwissenschaften und Geisteswissenschaften einander gegenüber gestellt. Die führende Rolle, welche innerhalb der ersteren die Physik beanspruchen kann, wird innerhalb der letzteren vielleicht eines Tags die Psychologie übernehmen. 68 ▷

Uebrigens werden den „theoretischen" Wissenschaften des weiteren die „praktischen" eindeutig zugeordnet.

⟨*Seite 69: leere Halbseite ohne Nummer*⟩

⟨*Seite 70: leere Halbseite ohne Nummer*⟩ 71 ▷

Inhaltsverzeichnis zum Winterseminar 1909/10.