

# EnLeMaH



## Leitlinien für enaktives mathematisches Lernen zu Hause

Dieses Projekt wurde mit Unterstützung der Europäischen Kommission finanziert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung [Mitteilung] trägt allein der Verfasser; die Kommission haftet nicht für die weitere Verwendung der darin enthaltenen Angaben.



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



ST. IGNATIUS OF LOYOLA  
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

## Intellektueller Output I

### Inhalt

|   |    |
|---|----|
| <b>1. Theoretischer Rahmen für eine enaktive Lehr-Lern-Praxis</b> .....               | 3  |
| 1.1. Einführung .....   | 3  |
| 1.2. Grundsätze für die Forschung als Aktivist.....                                   | 4  |
| 1.2.1. Grundsatz 1: Auswirkungen von Wissen/Tun und "-ing".....                       | 4  |
| 1.2.2. Grundsatz 2: Geschichte der strukturellen Kopplung.....                        | 5  |
| 1.2.3. Grundsatz 3: Vielfältige Perspektiven und Grundsatz 4: Wirksames Handeln ..... | 6  |
| 1.3. Theorie des kognitiven Wachstums von Jerome S. Bruner .....                      | 6  |
| 1.4. Aktives Lernen: Biologische Grundlagen .....                                     | 8  |
| 1.5. Prinzipien und aktive Ideen für die Gestaltung von Aktivitäten .....             | 10 |
| 1.6. Experimente .....  | 11 |
| 1.6.1. Die Methode "Experiment" - Unterschiede zwischen den Fächern .....             | 12 |
| 1.6.2. Mathematische Experimente als Prozess.....                                     | 12 |
| <b>2. Kurze Zusammenfassung der Lehrpläne</b> .....                                   | 14 |
| 2.1. Curricula für Funktionen in Kroatien.....  | 14 |
| 2.2. Curricula für Funktionen in Deutschland .....                                    | 18 |
| 2.3. Curricula für Funktionen in Litauen .....  | 21 |
| 2.4. Curricula für Funktionen in Spanien.....   | 25 |
| 2.5. Schlussfolgerung .....   | 25 |
| <b>3. Aktives Lernen und Lehren im EnLeMaH-Projekt</b> .....                          | 27 |
| 3.1. Kroatische Philosophie .....   | 27 |
| 3.1.1. Beispiele für enaktives Lernen in Kroatien.....                                | 28 |
| 3.2. Deutsche Philosophie .....   | 30 |
| 3.3. Die litauische Philosophie .....   | 32 |
| 3.4. Spanische Philosophie .....  | 37 |
| <b>4. EnLeMaH und die Kriterien für eine enaktive Arbeit.</b> .....                   | 38 |
| <b>5. Die Vorlage für EnLeMaH</b> .....   | 39 |

# 1. Theoretischer Rahmen für eine enaktive Lehr-Lern-Praxis

## 1.1. Einleitung

Die Einführung eines aktiven Ansatzes im Mathematikunterricht hilft den SchülerInnen ein mentales Netzwerk aufzubauen, um mathematische Konzepte und Beziehungen zu verstehen und außerdem zu begreifen, wie sie die Mathematik in ihrem täglichen Leben und in ihrem Beruf anwenden können. Aktives Lernen bedeutet, dass man mit selbstgemachten Aktivitäten, Experimenten und konkretem Umgang mit dem Material in neue mathematische Themen einsteigt, mentale Repräsentationen mathematischer Inhalte entwickelt und mathematische Beziehungen entdeckt.

Folglich tragen enaktive Methoden dazu bei, das Verständnis und die Attraktivität der Mathematik zu erhöhen [...] und in größerem Umfang dazu beizutragen, unzureichende Leistungen zu verringern. Dennoch basiert die Annahme eines enaktiven Ansatzes in der Mathematik auf zwei Hauptvoraussetzungen oder Prämissen.

Einerseits müssen die Lehrkräfte die entsprechenden pädagogischen Fähigkeiten erwerben und mit ihnen ausgestattet werden, um diese Methodik umzusetzen, insbesondere wenn es um ihre Anwendbarkeit im Kontext der digitalen Bildung und Ausbildung geht. Andererseits kann es in der derzeitigen Situation, die stark von der COVID-19-Krise betroffen ist, schwierig sein, enaktive Materialien zu erhalten, insbesondere wenn man bedenkt, dass die Schulen mehrere Monate lang geschlossen waren und der Unterricht auf Distanz stattfand.

EnLeMaH will die Einführung innovativer, digitaler und pädagogischer Kompetenzen für MathematiklehrerInnen fördern, die es ihnen ermöglichen, das Wissen und die Fähigkeiten zu entwickeln, um:

- a) Eine Lehr- und Lernumgebung umzusetzen, die an den Kontext der digitalen Bildung angepasst ist und dazu beiträgt, Mathematik für SchülerInnen (12-16 Jahre) attraktiver zu machen;
- b) SchülerInnen anzuleiten, mit Haushaltsmitteln aktive Materialien zu erstellen, die ihre Lernprozesse unterstützen, mit besonderem Schwerpunkt auf dem Mathematikunterricht im Bereich der Funktionen.

Zu diesem Zweck unterscheidet EnLeMaH drei Hauptphasen im Projekt. Die erste Phase (intellektueller Output 1) ist durch die Schaffung eines theoretischen Rahmens definiert, auf dem die Erstellung des EnLeMaH-Kurses für MathematiklehrerInnen der Sekundarstufe basiert. Die zweite Phase des Projekts (intellektueller Output 2) besteht



aus der Erstellung der Lerneinheiten und Materialien für den LehrerInnenausbildungskurs. Die dritte Phase (Intellektueller Output 3), parallel zur zweiten Phase, ist die Strukturierung dieser Lerneinheiten in Form eines Online-Kurses, dem EnLeMaH-LehrerInnenausbildungskurs.

Dieses Dokument mit dem Titel "Leitlinien für aktives Lernen zu Hause" (intellektueller Output 1) enthält daher:

- einen theoretischen Ansatz zum Enaktivismus, der sich auf die Autoren Maturana, Varela und Brown, sowie auf die Theorie des kognitiven Wachstums einschließlich der Darstellungsformen von Bruner stützt;
- seine Auswirkungen auf das Lehren/Lernen von mathematischen Inhalten aus einer aktiven Perspektive;
- eine Übersicht über die mathematischen Lehrplaninhalte (12-16 Jahre) in den verschiedenen Partnerländern dieses Projekts;
- eine Zusammenfassung der Traditionen, die jedes der am Projekt beteiligten Länder mit aktiven Ansätzen im Mathematikunterricht hat, und schließlich,
- die Kriterien, die EnLeMaH aufstellt, um eine Aktivität als enaktiv klassifizieren zu können. Zusammen mit diesen Kriterien schlägt EnLeMaH eine Vorlage vor, die bei der Erstellung neuer und enaktiver Lernaktivitäten befolgt werden kann.

## 1.2. Grundsätze für die Forschung als Aktivist

In diesem Kapitel werfen wir einen Blick auf die Beziehung zwischen Forschen und Lehren. Für den Zweck des EnLeMaH-Projekts sind Aspekte grundlegend für das Verständnis von Lernen und Lehren in enaktiven Situationen. Unser Ansatz für die Zusammenarbeit bei der Erarbeitung enaktiver Ideen basiert auf den Grundsätzen für das Forschen als Enaktivist von Brown (2015). In diesem Abschnitt werden wir seine drei Prinzipien vorstellen.

### 1.2.1. Grundsatz 1: Auswirkungen von Wissen/Tun und "-ing

Enaktivistische Theorien werden aus der biologischen Basis des Seins heraus entwickelt und der enaktive Ansatz besteht aus zwei Punkten (Brown, 2015):

- Wahrnehmung besteht in wahrnehmungsgelitetem Handeln und
- Kognitive Strukturen ergeben sich aus den wiederkehrenden sensomotorischen Mustern, die eine wahrnehmungsgelitete Handlung ermöglichen. (Varela et al. 1991, S. 172-173)



Daher gilt: "Wissen ist Tun, Lernen ist Sein". Wir sind buchstäblich das, was wir tun, denn unser Umfeld hat uns geschaffen, so wie wir unsere Welt geschaffen haben. (Brown, 2015).

Abbildung 1: Gemeinsame Gruppen  
tauschen Erfahrungen aus

Es handelt sich nicht um eine individuelle kognitive Struktur. Wir sind ko-emergent und dort, wo es eine Koordination von Handlungen gibt, wie in einem Klassenzimmer oder einer kollaborativen Gruppe in einem Forschungsprojekt, entsteht eine Kultur von Praktiken, die *gut genug ist* (effektives Handeln), um zu erreichen, was getan werden muss. (Brown, 2015, S.189).

Dann können wir als gemeinschaftliche Gruppe von ForscherInnen und LehrerInnen unsere eigenen Erfahrungen mit dem Lernen und Lehren austauschen, was uns erlaubt, zu schreiben und zu diskutieren, um zu endgültigen Schlussfolgerungen zu gelangen (Abbildung 1).

### 1.2.2. Grundsatz 2: Geschichte der strukturellen Kopplung

Maturana und Varela (1992, S. 75) sprechen von "struktureller Kopplung", wenn es eine Geschichte von wiederkehrenden Interaktionen gibt, die zu einer strukturellen Kongruenz zwischen zwei (oder mehr) Systemen führt". Das heißt, ein von einem anderen geäußertes Bedürfnis löst die Handlung aus, die mir hilft, meine eigenen Bedürfnisse zu erfüllen.

Wie können wir die Idee der strukturellen Kopplung in kollaborativen Gruppen nutzen?

- Beim Lehren und Lernen gibt es keine Gewissheiten, aber...
- Was wir durch unsere Handlungen erfahren, ist eine Interpretation, also...
- "Zwei Menschen können nicht dasselbe sehen oder dasselbe Bewusstsein teilen. Wir können jedoch kommunizieren, weil wir über die Details gemeinsamer Erfahrungen sprechen können, und dadurch kann die Kluft zwischen den Interpretationen verringert werden" (Brown, 2015, S.189).

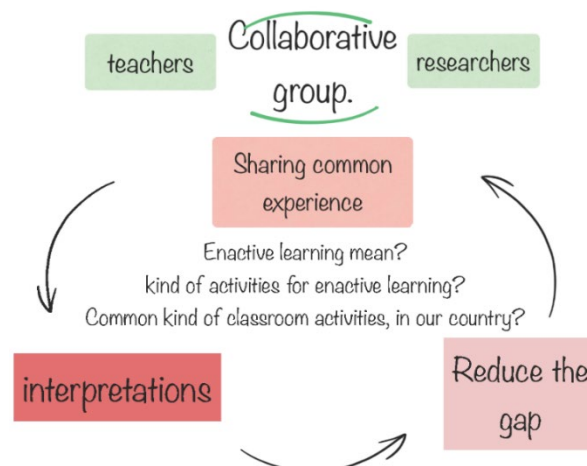


Abbildung 2. Kollaborative Gruppe beim aktiven Lernen

Wenn wir also in der Lage sind, unsere Erfahrungen auszutauschen und auf der Grundlage der für unser Projekt notwendigen Fragen zu diskutieren, verringert sich die Kluft zwischen unseren Interpretationen und weicht einer gemeinsamen Vision.

### 1.2.3. Grundsatz 3 und 4: mehrere Perspektiven und wirksame Maßnahmen

"Die Bedeutung der Arbeit aus und mit mehreren Perspektiven und die Schaffung von Modellen und Theorien, die gut genug sind für, nicht definitiv von" (Reid 1996, S. 207). "Effektiv" ist ein technisches Wort in enaktivistischen Ideen, das mit kognitiven Strukturen und dem Lernen verbunden ist. "Effektive" Aktionen wurden als "gut genug für" das Mathematiklernen der Kinder und für die Unterstützung der neuen LehrerInnen beim Nachdenken und Forschen verwendet.

Die Mitglieder der kollaborativen Gruppe von ForscherInnen und LehrerInnen arbeiten nicht an "Antworten", sondern an der Erweiterung unseres Spektrums an möglichen effektiven Praktiken. In den folgenden Kapiteln wird dieses Spektrum auf dem Gebiet der Repräsentationen und der biologischen Grundlage des aktiven Lernens präzisiert.

## 1.3. Theorie des kognitiven Wachstums von Jerome S. Bruner

Ich halte es für sinnvoll, drei Systeme der Informationsverarbeitung zu unterscheiden, mit denen der Mensch Modelle seines Wortes konstruiert: durch Handeln, durch Bilder und durch Sprache (Bruner 1965, S. 1).

Wie Bruner oben feststellte, stellen Individuen ihr Lernen und die Welt, in der sie leben, durch Handlungen dar, wenn sie dies nicht mit Bildern oder Worten tun können. Beim Lernen ging er davon aus, dass jedes Fach in jedem Entwicklungsstadium so unterrichtet werden kann, dass es den kognitiven Fähigkeiten entspricht. Um eine höher qualifizierte Tätigkeit zu erlernen, muss sie "in einfachere Komponenten zerlegt werden, von denen jede von einem weniger qualifizierten Operator ausgeführt werden kann" (Bruner 1964, S. 2). Repräsentationen sind das Endprodukt eines Systems der Kodierung und Verarbeitung vergangener Erfahrungen. Daher führte er ein Modell ein, das drei Arten der Repräsentation umfasst (siehe Tabelle 1). Er ging davon aus, dass Menschen ihr Wissen auf diese drei Arten repräsentieren. Repräsentationsmodi "sind keine Strukturen, sondern beinhalten vielmehr verschiedene Formen der kognitiven Verarbeitung" (Schunk 2012, S. 457).

Tabelle 1. Modi der Darstellungen

| Bezeichnung der Vertretungsart | Beschreibung | Beispiele im Mathematikunterricht |
|--------------------------------|--------------|-----------------------------------|
|--------------------------------|--------------|-----------------------------------|



|                                    |                           |  |   |
|------------------------------------|---------------------------|--|---|
| Enaktiver Modus der Repräsentation |                           | schlägt vor, dass der Einzelne sein Lernen und die Welt, in der er lebt, durch Handlungen darstellt, wenn er keine Bilder oder Worte verwenden kann. Ein Schüler versteht seine Umgebung am besten, wenn er mit den Objekten um ihn herum interagiert. | Verwendung von Material zur Darstellung eines mathematischen Konzepts.<br> |
| Ikonische Darstellungsweise        |                           | Fasst Ereignisse durch die selektive Organisation von Begriffen und Bildern, durch die räumlichen, zeitlichen und qualitativen Strukturen des Wahrnehmungsfeldes und ihrer transformierten Bilder zusammen.  | Verwendung von Bildern (z. B. Bilder der (mathematischen) Situation, Diagramme) zur Darstellung eines mathematischen Konzepts                                 |
| Symbolische Darstellungsweise      | Verbal - symbolisch       | Jedes Wort hat eine feste Beziehung zu etwas, das es repräsentiert   | Verwendung eines (tatsächlich gesprochenen) Wortes zur Darstellung eines mathematischen Konzepts  |
|                                    | Nicht verbal - symbolisch | Jedes Symbol hat eine feste Beziehung zu etwas, das es darstellt   | Verwendung schriftlicher Sätze und mathematischer Symbole (z. B. Gleichungen) zur Darstellung eines mathematischen Konzepts                                   |

Beim aktiven Lernen entsprechen sich diese Darstellungsformen im Lernprozess (Abbildung 3). Enaktive Situationen werden in ikonische Repräsentationen übersetzt und auf diese Situation zurückgeführt. Die Basis der Enaktivität und/oder der ikonischen Repräsentation wird die Basis der symbolischen Transformation sein und umgekehrt: symbolische Modi werden in ikonischen und enaktiven Modi entdeckt.

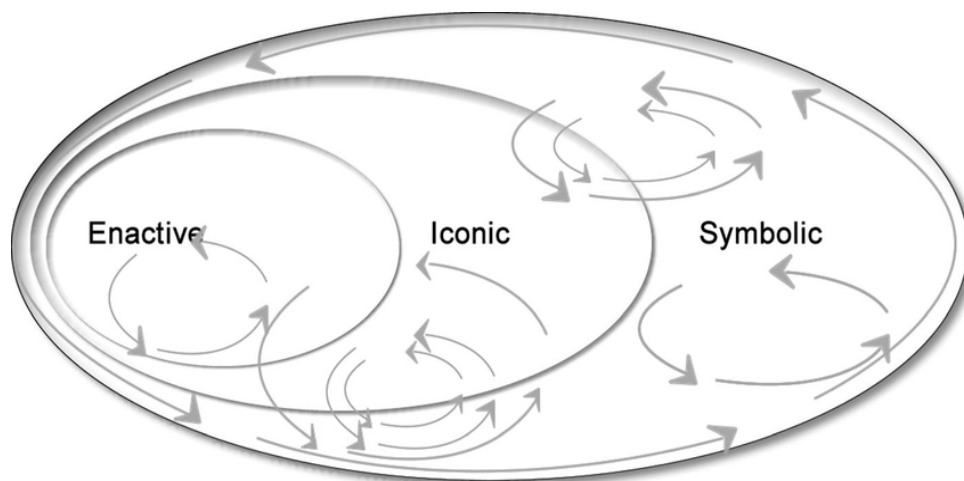


Abbildung 3. Enaktiv, ikonisch und symbolisch als verschachtelt, ko-impliziert und simultan (Francis, Khan, David, 2016, S.8)


Die drei Repräsentationsmodi greifen damit einen zentralen theoretischen Aspekt des EnLeMaH-Projekts auf: Für das Verständnis und die Gestaltung enaktiver Lernaktivitäten ist die Trennung zwischen den verschiedenen Modi grundlegend. Im nächsten Kapitel gehen wir näher auf die Aspekte für die Gestaltung von enaktivem Lernen ein.

## 1.4. Aktives Lernen: Biologische Grundlagen

Di Paolo (2018) zufolge wurde der Begriff enaktiv bereits vor den biologischen Grundlagen verwendet, die die Theorie heute prägen. Bruner (1966) zum Beispiel verwendete den Begriff enaktiv, um eine Beziehung zwischen Repräsentationen und körperlichen Aspekten herzustellen, die zur gelebten Erfahrung einer Person gehören. Die heutige Bedeutung des Enaktivismus beruht auf den Arbeiten des Biologen Francisco Varela (1946-2001) und auf den gemeinsam mit Maturana (1980, 1987) durchgeführten Arbeiten. Heute wird diese theoretische Perspektive von verschiedenen Forschergruppen weiterentwickelt, die sich auf unterschiedliche Bereiche konzentrieren: Brown, L., 2011, 2012, 2015. Coles, A., 2013, 2015. Di Paolo, 2005, 2018. Lozano, MD. 2004, 2015, um nur einige zu nennen.

Varela, Thompson und Rosch (1991) verwendeten die Begriffe "enaction" und "enactive", um die von ihnen dargelegte nicht-repräsentative Sichtweise der Kognition zu beschreiben: Kognition als "verkörperte Handlung". Dies bezieht sich auf zwei wichtige Punkte: (1) Wahrnehmung besteht in wahrnehmungsgelitetem Handeln und (2) kognitive Strukturen entstehen aus den wiederkehrenden sensomotorischen Mustern, die wahrnehmungsgelitetes Handeln ermöglichen (Varela et al. 1991, S. 172-173).

Um zu verstehen, was Handlung ist, müssen wir also verstehen, was Wahrnehmung ist. Es ist wichtig zu wissen, dass Wahrnehmung manchmal als passiver Prozess angesehen wird (z.B. wenn Licht in die Augen fällt und man in der Lage ist, ein Bild zu erzeugen), aber im Enaktivismus ist die Wahrnehmung ein aktiver Prozess, und ohne Handlung gibt es keine Wahrnehmung. Andererseits wird dieser aktive Prozess durch die Struktur des Wahrnehmenden bestimmt, z.B. wie ein Vogel eine bestimmte Situation wahrnimmt, ist ganz anders als die Wahrnehmung eines Menschen.

Auf der einen Seite wird die *Organisation* als die Beziehungen verstanden, die zwischen den Komponenten von etwas bestehen müssen, um als Mitglied einer bestimmten Klasse anerkannt zu werden. Auf der anderen Seite wird die *Struktur* von etwas als die Komponenten und Beziehungen verstanden, die spezifisch eine bestimmte Einheit bilden und deren Organisation sie ausführt (Lozano, 2014). Maturana und Varela weisen darauf hin, dass Lebewesen Systeme sind, deren Struktur sich ständig verändert, deren Organisation aber erhalten bleibt (Maturana 1998a in Lozano, 2014). Dies geschieht in einem besonderen Organisationsmodus, 



den sie *autopoiesis* nennen. Ein autopoietisches System ist demnach ein System, das sich zwar ständig verändert und neue Bezugssysteme hervorbringt, dessen Ergebnis aber immer derselbe Produzent ist. Nach Matura (1987) besteht das Problem darin, wie man mit dem Problem des Strukturwandels umgehen und zeigen kann, wie ein Organismus, der in einer Umgebung existiert und entsprechend seinen Bedürfnissen arbeitet, kontinuierliche strukturelle Veränderungen erfahren kann, auch wenn sich die Umgebung verändert. Dies könnte also eine Annäherung an das Problem des Mathematikunterrichts sein: Ein Mathematikstudent ist ein System, das sich in jedem Moment intern organisiert. Jedes Mal, wenn ein Stimulus (z. B. ein mathematisches Symbol) eintrifft, wird er sofort in die Struktur des Schülers, in sein Wesen, aufgenommen.

Andererseits interagieren laut Lozano (2014) Lebewesen mit der Umwelt, die andere Lebewesen einschließt, und es gibt eine wiederkehrende Interaktion zwischen zwei Systemen, die sich beide in ähnlicher Weise verändern werden. Aus dieser Perspektive könnte man sagen, dass eine Mathematikschülerin, die wiederholt mit ihrer Lehrkraft und den anderen SchülerInnen interagiert, gemeinsam eine Geschichte von Interaktionen schafft. Daher kann sich die Struktur all derer, die am Unterricht teilnehmen, in ähnlicher Weise verändern, wodurch neue Formen der Kommunikation und der Arbeit entstehen. Geschieht dies nicht, dann führen die strukturellen Veränderungen nicht zu einer Anpassung an die Umwelt. Lozano (2014) gibt dafür ein klares Beispiel: Wenn ein Schüler wiederholt bei Mathetests durchfällt, könnte dies in einem bestimmten Kontext bedeuten, dass der Schüler die Lerngruppe wechselt, in der er ist.

Es ist wichtig zu erwähnen, dass die Welt nicht etwas ist, das uns gegeben wird, sondern etwas, zu dem wir eine Beziehung haben, indem wir uns bewegen, berühren, atmen und essen - das ist es, was Maturana und Varela als enaktive Kognition bezeichnet haben (Maturana und Varela, 1992). Der Enaktivismus besagt also, dass unsere geistige Aktivität (Gedanken, Bilder, Gefühle) in den Handlungen verwurzelt ist, die wir mit und durch unseren Körper ausführen. Der enaktivistische Standpunkt besagt, dass Lernen durch die aktive Interaktion mit der Umwelt entsteht, so dass es nicht als Absorption von Informationen betrachtet werden kann und Kognition kein Phänomen ist, das im Kopf oder Körper eines einzelnen Individuums entsteht, sondern durch ständige Interaktionen mit der Umwelt, die wiederum durch diese verändert wird. In unserem Fall sind die Gesellschaft und die Kultur Teil unserer Umwelt als Menschen.

Dieses Konzept des Enaktivismus aus biologischer Sicht lädt uns dazu ein, über die Bedeutung der Art der Aktivitäten nachzudenken, die für die Behandlung eines mathematischen Lernziels ausgewählt werden. Im Allgemeinen gibt es viele Materialien, die uns zur Verfügung stehen, aber wir müssen den Kontext berücksichtigen, in dem sich unsere SchülerInnen entwickeln, die Art der Umgebung und die Art der Struktur, aus der sie bestehen. Das heißt, wir müssen versuchen,

Aufgabenmodelle zu erstellen, die dem Niveau unserer SchülerInnen entsprechen, und gleichzeitig Materialien verwenden, die es ihnen ermöglichen, den Körper als Hauptwerkzeug für die Entwicklung neuer Lernmethoden zu nutzen, so dass die Bilder, die die SchülerInnen über die Aktivität erstellen, durch ihre eigenen Handlungen erfahren werden können. All dies muss von Strategien begleitet werden, die eine gute Entwicklung der Klassenaktivitäten und ein gutes Management der Umgebung unter Berücksichtigung der individuellen und gruppenspezifischen Merkmale ermöglichen.

Daher sollte das Hauptziel der Aktivitäten, die im Rahmen dieses EnLeMaH-Projekts entwickelt werden sollen, die biologische Vision des Enaktivismus respektieren, d.h. mit Lernzielen beginnen, die durch Handlungen erreicht werden können, die den Körper einbeziehen. Mit denselben Bildern und Darstellungen, die die SchülerInnen durch die Aktivität erzeugen, können wir uns dann auf Bruners Theorie stützen, um die notwendigen Transformationen vorzunehmen, damit Die SchülerInnen ihre eigenen Visualisierungen mit anderen Darstellungsformen verknüpfen können, ohne die Tatsache aus den Augen zu verlieren, dass die Erzeugung der individuellen Darstellungen der SchülerInnen durch ihre eigene Wahrnehmung der durchgeführten Handlungen gegeben ist.

Im folgenden Abschnitt finden wir einen kleinen Leitfaden zu Strategien, die bei der Auswahl einer enaktiven Aktivität verwendet werden können und die Bruner auch für das Verständnis von Vorstellungen und Fehlvorstellungen mit Hilfe der verschiedenen Darstellungsformen verwendet.

## 1.5. Grundsätze und aktive Ideen für die Gestaltung von Aktivitäten

1. Beginn mit einer (abgeschlossenen) Aktivität (die das Erlernen einer neuen Fähigkeit beinhalten kann).
2. Betrachtung von mindestens zwei kontrastierenden Beispielen (wenn möglich, Bilder) und Sammlung der Antworten auf einer "gemeinsamen Tafel".
3. Aufforderung an Die SchülerInnen, sich dazu zu äußern, was an den kontrastierenden Beispielen gleich oder anders ist, und/oder Fragen zu stellen.
4. Vorbereitung einer Herausforderung für den Fall, dass keine Fragen gestellt werden.
5. Einführung von Sprache und Notation, die sich aus den Unterscheidungen der SchülerInnen ergeben.
6. Gelegenheiten für Die SchülerInnen, Muster zu erkennen, Vermutungen anzustellen und an deren Beweis zu arbeiten (daher auch Verallgemeinerung und Algebra).
7. Gelegenheiten für die Lehrkraft, weitere neue Fertigkeiten zu vermitteln und für Die SchülerInnen, Fertigkeiten in verschiedenen Kontexten zu üben.

Die Aktivität wird, wenn möglich, etwas Sichtbares oder Greifbares beinhalten, das alle SchülerInnen tun können. Die Herausforderung und die Möglichkeit, Fähigkeiten in verschiedenen Kontexten zu vermitteln, hängen mit der menschlichen Fähigkeit zusammen, etwas zu lernen. Wenn wir etwas in verschiedenen Kontexten tun, ist es wahrscheinlicher, dass wir die Fähigkeit extrahieren und für eine weitere Verwendung aufbewahren können. (Coles und Brown 2013, S. 186-187). Zumindest eine mögliche Annäherung an die Definition von enaktivem Lernen: "Lernen bedeutet, mehr zu sehen, anders zu sehen, in einem rekursiven Prozess, der mit *Handlungen in der Welt* verbunden ist und Rückmeldungen gibt, die zu angepassten Handlungen führen, bis das Verhalten effektiv wird, d. h. keine Störungen mehr verursacht werden und die Handlung daher 'gut genug' ist, um in der Welt zu sein" (Brown, 2015, S. 190). Bisher haben wir die biologischen Grundlagen des enaktiven Lernens besprochen, und Abbildung 4 zeigt uns einen möglichen Lernkontext. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, wie die enaktiven Grundlagen mit den von Bruner vorgeschlagenen Repräsentationsmodi verknüpft werden können, der den Enaktivismus als Grundlage nimmt, um zu zeigen, wie sich Wissen zu entwickeln beginnt.

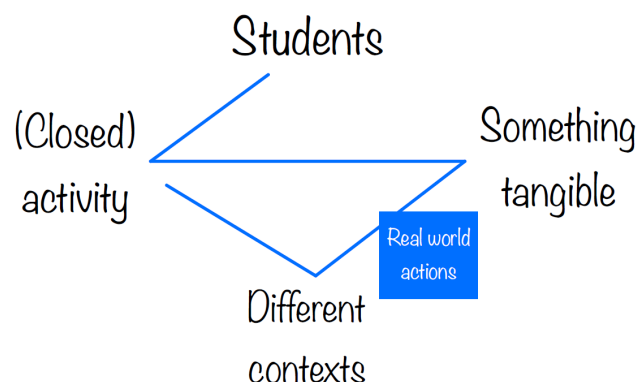


Abbildung 4: Lernkontext

Der theoretische Input in den ersten drei Kapiteln befasst sich mit verschiedenen Gesichtspunkten des aktiven Lernens: die Verbindung zwischen Forscher und Lehrer, die Art der Darstellung und Aspekte für die Gestaltung des aktiven Lernens. Im folgenden Kapitel wird eine besondere Art von Aktivität berücksichtigt: das Experiment als zentrale Aktivität für aktives Lernen.

## 1.6. Experimente

Ein Experiment ist eine wissenschaftliche Methode, mit der Informationen gesammelt werden sollen. Es wird sowohl in der Schule als auch in der Universität und auch in mehreren Fächern verwendet. Es gibt jedoch einen Unterschied zwischen

Experimenten in der Mathematik und anderen Fächern, der im ersten Absatz deutlich wird. Mathematische Experimente haben also zwei verschiedene Ziele. Die einzelnen Schritte von mathematischen Experimenten sind im zweiten Absatz zu sehen.

#### 1.6.1. Die Methode "Experiment" - Unterschiede zwischen den Themen

Nach Kirchner et al. dienen Experimente in den Naturwissenschaften verschiedenen Zwecken: dem Sammeln von Wissen, der Demonstration von Phänomenen, der Vermittlung von "Primärerfahrungen" an SchülerInnen oder der Überprüfung einer Beziehung oder eines Modells (vgl. Kircher/Häußler/Girwidz, 2009). Alle diese Ziele führen zu einem besseren Verständnis der Natur. Typischerweise gibt es in den Naturwissenschaften bis zu sechs Schritte für ein Experiment. Zunächst muss der Untersuchungsgegenstand geklärt werden. Danach müssen Die SchülerInnen in einem zweiten Schritt Hypothesen sammeln. Der dritte und vierte Schritt sind die Planung und Durchführung des Experiments. Während der Durchführung ist die Messung von Daten wichtig, um diese Daten auf Zusammenhänge zwischen Größen zu analysieren. Diese Analyse ist der fünfte Schritt und wird erst vom letzten Schritt gefolgt: der Interpretation der Ergebnisse. Im letzten Schritt werden die Ergebnisse und Hypothesen verglichen (vgl. a.a.O.). Die Interpretation der Ergebnisse selbst führt oft zu einem anderen Untersuchungsgegenstand und damit zu einem weiteren Experiment. Auch wenn es Differenzierungen zwischen Experimenten gibt, z. B. "Führen SchülerInnen oder die Lehrkraft das Experiment durch?" oder "In welche Phase des Unterrichts ist das Experiment integriert?" (vgl. Wiesner/Schecker/Hopf, 2017, S. 106-114), geht es in den Naturwissenschaften bei jedem Experiment um reale Gegenstände.

Zwischen mathematischen Experimenten und Experimenten in den Naturwissenschaften gibt es Gemeinsamkeiten und Unterschiede. In beiden Fächern beschreibt ein Experiment eine Art der Erkenntnisgewinnung durch Beobachtung von kontrollierten Handlungen mit "Objekten" (vgl. Ludwig/Oldenburger, 2007, S. 4). Der Prozess des Experimentierens in der Mathematik ist weitgehend identisch mit dem Prozess in den Naturwissenschaften. Das Untersuchen mehrerer Beispiele oder der Umgang mit Material ist für die SchülerInnenInnen ein Ausgangspunkt für die Bildung von Hypothesen, so dass Schritt zwei nach Schritt drei und vier ersetzt werden kann. Da mathematische Sachverhalte bewiesen werden müssen, bietet der sechste Schritt der Interpretation Ansätze zu einem formalen Beweis oder führt zu einer Wiederholung des Experiments mit leicht veränderten Bedingungen (vgl. Philipp, 2012, S. 27 oder Goy/Kleine, 2015, S. 6). Schließlich können mathematische Experimente von realen Gegenständen losgelöst werden (vgl. Absatz 4). Das Experimentieren in der Mathematik erfordert also die Kenntnis von Heuristiken und vermittelt prozessorientierte Kompetenzen.

#### 1.6.2. Mathematische Experimente als Prozess

Wie bereits erwähnt, ist das Experimentieren in der Mathematik ein Zyklus aus verschiedenen Schritten. In Anlehnung an Philipp (2012) und Goy/Kleine (2015) gibt es vier Hauptschritte für mathematische Experimente:

1. Nennung des mathematischen Problems/der mathematischen Fragestellung
2. Generierung von Hypothesen
3. Planung, Durchführung und Auswertung des Experiments (kurz: "Versuch")
4. Ausarbeitung eines mathematischen Modells, Konzepts oder Beweises

Bei jedem Experiment ist die Formulierung des mathematischen Problems oder der Frage der erste und die Ausarbeitung eines Modells, Konzepts oder Beweises der letzte Schritt. Die Reihenfolge der anderen Schritte kann unter Berücksichtigung des Ziels des Experiments geändert werden. Wenn das Experiment darauf abzielt, Hypothesen zu verifizieren oder zu falsifizieren, müssen diese Hypothesen zuerst aufgestellt werden. Wenn das Experiment darauf abzielt, dass Die SchülerInnen lernen, wie man experimentiert oder ihre eigenen Modelle und Konzepte entwickelt, muss der Versuch vor der Hypothesenbildung stattfinden (vgl. Goy/Kleine, 2015, S. 5f). Es ist jedoch nicht immer notwendig, vor dem Versuch Hypothesen zu sammeln.

Heintz konstruiert drei Kontexte für mathematische Experimente: Entdeckung, Validierung und Überzeugung (vgl. Philipp, 2012, S. 25). Der Entdeckungskontext bezieht sich auf die Generierung von Hypothesen und ist als systematischer Versuch zur Erforschung unbekannter Zusammenhänge gedacht. Hier wird Wissen durch Induktion gewonnen. Andernfalls wird Wissen durch Deduktion gewonnen, wenn eine gegebene Hypothese durch ein mathematisches Experiment validiert wird. In diesem Fall wird das Experiment in den Kontext der Validierung gestellt. Wenn weder Entdeckung noch Validierung erforderlich sind, weil eine Beziehung, ein Konzept oder ein Modell bereits bestätigt ist, gibt es einen weiteren Kontext für mathematische Experimente: die Überzeugung. In diesem Fall soll das Experiment Die SchülerInnen überzeugen (vgl. a.a.O.).

Ausgehend vom theoretischen Hintergrund lässt sich enaktives Lernen im EnLeMaH-Projekt als handlungsorientierte Aktivitäten beschreiben, die es den SchülerInnen ermöglichen, mathematische Beziehungen zu entdecken oder mathematische Zusammenhänge zu beweisen. Die verschiedenen Phasen eines Experiments können Lehrkräften auf der Grundlage der Gestaltungsprinzipien als Leitfaden dienen, um eine enaktive Lernsituation zu schaffen.

Um dies zu erreichen, werden wir im Hinblick auf die Idee des Enaktivismus und des Grundkonzepts von Experimenten in der Mathematik einen Blick auf die Lehrpläne der einzelnen Länder werfen, die in die Entwicklung des EnLeMaH-Projekts eingebunden

sind, um sicherzustellen, dass der erarbeitete Kontext gut auf das jeweilige Schulsystem übertragen werden kann.

## 2. Kurze Zusammenfassung der Lehrpläne

An dem EnLeMaH-Projekt nehmen ForscherInnen und LehrerInnen aus vier verschiedenen Ländern teil. Im Rahmen dieses Projekts liegt der Schwerpunkt auf der Schaffung von enaktiven Lernsituationen im Bereich der Funktionen für SchülerInnen im Alter von 12 bis 16 Jahren. In den folgenden Kapiteln werden die unterschiedlichen Lehrpläne in den Ländern berücksichtigt, um eine Grundlage für enaktives Lernen in diesem Bereich der Mathematik in der Schule zu schaffen.

### 2.1. Curricula für Funktionen in Kroatien

In den kroatischen Lehrplänen für Mathematik gibt es fünf Hauptthemen: (A) Zahlen, (B) Algebra und Funktionen, (C) Geometrie, (D) Messen und (E) Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Im Bereich "Algebra und Funktionen" definieren Die SchülerInnen Funktionen und interpretieren, vergleichen, stellen sie grafisch dar und lernen ihre Eigenschaften kennen, indem sie Regelmäßigkeiten erkennen und die Abhängigkeit zweier Größen in der Sprache der Algebra beschreiben. Sie modellieren Situationen, indem sie sie algebraisch beschreiben, und lösen reale Probleme, die Regelmäßigkeiten oder funktionale Abhängigkeiten beinhalten. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die verschiedenen Arten von Funktionen für 12- bis 16-jährige SchülerInnen.

Tabelle 2: Kroatiens Lehrpläne

| Bildungsergebnisse   |           | Begriff der Funktion  | Grafische Darstellung der Funktion | Anteil   | Lineare Funktion  | Quadratische Funktion |
|--|-----------|---|------------------------------------|--|---|-----------------------|
| P<br>R<br>I<br>M<br>A<br>R<br>Y<br><br>E<br>D<br>U<br>C<br>A<br>T<br>I | 6. Klasse |   |                                    |  | Lösen und Anwenden einer linearen Gleichung   |                       |
|  | 7. Klasse | Zusätzlicher Inhalt: Lineare Abhängigkeit mit linearer Funktion verbinden | Lineare Abhängigkeit               | Proportionalität und umgekehrte Proportionalität | Lösen und Anwenden einer linearen Gleichung<br><br>Anwendung einer linearen Abhängigkeit<br><br>Zusätzlicher Inhalt: Lösen einfacher linearer Ungleichungen |                       |

|  |                               |                                    |   |  |  |   |
|--|-------------------------------|------------------------------------|---|--|--|---|
| O<br>N   | 8. Klasse                     |                                    |   |  | Lösen und Anwenden einer linearen Gleichung<br>Lösen und Anwenden eines Systems von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten   | Lösen und Anwenden einer quadratischen Gleichung der Form $x^2 = k$                     |
| S<br>E<br>C<br>O<br>N<br>D<br>A<br>R<br>Y<br><br>E<br>D<br>U<br>C<br>A<br>T<br>I<br>O<br>N | 9. Klasse (14,15 Jahre alt)   | Lineare Funktion                   | Graph einer linearen Funktion                     | Verhältnismäßigkeit und Prozentsatz anwenden | Anwenden einer linearen Gleichung und eines Systems linearer Gleichungen<br><br>Lineare Ungleichungen in Problemsituationen anwenden<br>Verschiedene Darstellungen einer linearen Funktion verbinden<br><br>Anwendung einer linearen Funktion bei der Lösung von Problemen |   |
|  | 10. Klasse (15, 16 Jahre alt) | Konzept und Analyse einer Funktion | Analyse der grafischen Darstellung einer Funktion |  |  | Lösen und Anwenden einer quadratischen Gleichung<br>Eine quadratische Funktion anwenden |

Um einen genaueren Blick auf diese Noten und ihre Nachfrage zu werfen:

**6. und 7. Klasse:** Die SchülerInnen analysieren eine Problemsituation für die Mengen Z und Q und formulieren sie als lineare Gleichung. In der Jahrgangsstufe 6 (auch 7) reduzieren sie eine komplexere lineare Gleichung in die Form  $ax = b$  ( $ax + b = 0$ ) für  $a$  und  $b$ , die nichtnegative rationale Zahlen sind (rationale Zahlen), indem sie Gleichungsgleichungen anwenden. Außerdem lösen sie eine einfache lineare Gleichung mit Absolutwert. Neben dem Lösen von linearen Gleichungen überdenken Die SchülerInnen die Richtigkeit und Sinnhaftigkeit der erhaltenen Lösung und erklären sie im Zusammenhang mit dem Problem. Ein weiterer Inhalt ist das Lösen einfacher linearer Ungleichungen. In realen Situationen erkennen und erklären Die SchülerInnen Proportionalität, Antiproportionalität und bestimmen und interpretieren

den Proportionalitätskoeffizienten und die Antiproportionalität. Außerdem bringen sie den Proportionalitätskoeffizienten mit dem Verhältnis zweier proportionaler Größen in Verbindung. Es wird empfohlen, die SchülerInnen zu ermutigen, einen intuitiven Ansatz zur Lösung von Problemen der Proportionalität und der umgekehrten Proportionalität zu verwenden. Außerdem sollen sie einige komplexe Maßeinheiten ( $\text{km/h}$ ,  $\text{m/s}$ ,  $\text{g/cm}^3$ ,  $\text{kg/m}^3$ ,  $\text{Einwohner/km}^2$ ) bestimmen und erklären und Währungen umrechnen.

Bei dem Ergebnis "Anwenden einer linearen Abhängigkeit" testen die LehrerInnen nicht die Rechentechnik der SchülerInnen, sondern ihr logisches Denken und ihre Fähigkeit, das Problem zu analysieren. Die SchülerInnen erklären die lineare Abhängigkeit von Größen anhand von Problemsituationen aus dem wirklichen Leben. Der Schwerpunkt liegt auf der Untersuchung abhängiger Größen, auf der Übersetzung der beobachteten Situation der linearen Abhängigkeit in eine algebraische Notation, auf der Interpretation einer grafischen Darstellung der linearen Abhängigkeit und auf der Analyse von Veränderungen. Die SchülerInnen erstellen eine Tabelle mit den zugehörigen Werten linear abhängiger Daten. Sie stellen die lineare Abhängigkeit grafisch dar und stellen eine Verbindung zwischen linearer Abhängigkeit und linearer Funktion her.

**8. Klasse:** Die SchülerInnen erkennen bei gegebenen Problemen die Möglichkeit, ein System aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten zu lösen. Wenn das System komplexer ist, reduzieren sie es auf eine Standardform und lösen es mit einer vorgegebenen oder beliebigen Methode. Außerdem diskutieren sie die Existenz der erhaltenen Lösung (Einzigartigkeit, Nichtexistenz, unendlich viele Lösungen). Die SchülerInnen beschreiben eine quadratische Gleichung der Form  $x^2 = k$ , wobei  $k$  eine nichtnegative rationale Zahl ist, und sie wenden die quadratische Gleichung zur Lösung von Problemsituationen und zur Darstellung von Größen durch mathematische Formeln an. Sie interpretieren die Existenz von zwei Lösungen.

**9. Klasse:** Die SchülerInnen schreiben eine gegebene Aufgabe in Form einer linearen Gleichung oder eines linearen Gleichungssystems und lösen sie. Sie diskutieren die Existenz der Lösung unter Berücksichtigung der Werte der Parameter. Die SchülerInnen lösen lineare Ungleichungen, indem sie die Lösung auf verschiedene Arten schreiben, lineare Ungleichungssysteme mit einer Unbekannten und einfache lineare Ungleichungen mit Absolutwert. Die SchülerInnen verbinden verschiedene Darstellungen einer linearen Funktion. Für eine gegebene lineare Funktion berechnen sie den Wert der Funktion, zeichnen einen Graphen, definieren und bestimmen den Nullpunkt der Funktion und interpretieren die Koeffizienten.



Außerdem stellen sie die lineare Funktion durch Tabellen und Graphen dar und beschreiben den Einfluss der Koeffizienten auf die Lage des Graphen. Die SchülerInnen lesen Argumente und Werte aus dem Graphen ab und bestimmen die Koeffizienten und die Funktion. Aus den gegebenen Elementen (Argumente und Werte, Punkte des Graphen, Koeffizienten) bestimmen sie die Funktion. Der erweiterte Inhalt besteht darin, einen Graphen der Absolutwertfunktion zu zeichnen. Aus den gegebenen Daten schreiben die SchülerInnen die lineare Abhängigkeit als lineare Funktion. In Problemsituationen erkennen sie eine lineare Abhängigkeit, schreiben sie als Funktion auf und wenden sie zur Analyse des Problems an. Sie müssen ein Problem anhand seiner grafischen Darstellung analysieren. *Entwerfen Sie z. B. eine Aufgabe, die in der gegebenen Grafik (Abbildung 5) dargestellt ist:*

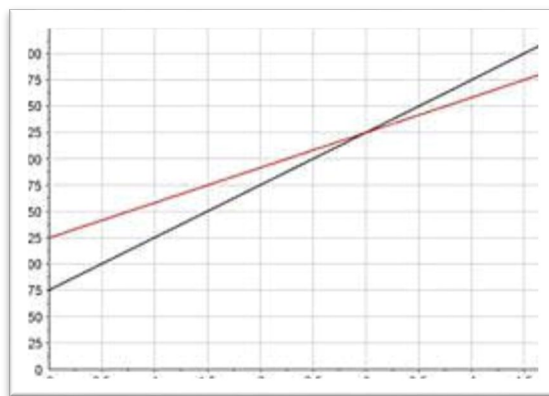


Abbildung 5: Entwerfen einer Aufgabe aus

**10. Klasse:** Die SchülerInnen lösen effektiv eine quadratische Gleichung, überprüfen die Lösungen und argumentieren die Art der Lösungen. Zum Beispiel: *"Ohne die Gleichung zu lösen  $3x^2 + 4x - 1 = 0$  die Art ihrer Lösung bestimmen"*. Außerdem wenden sie die Diskriminante an, um die Art der Lösung einer quadratischen Gleichung zu bestimmen. Darüber hinaus lösen sie Gleichungen, die sich auf eine quadratische Gleichung reduzieren, modellieren eine Problemsituation und bestimmen Lösungen.

Im Bereich *"Analyse einer Funktion"* berechnen die SchülerInnen den Funktionswert einer polynomialen, rationalen und irrationalen Funktion. Sie erklären den Begriff der Funktion und bestimmen rechnerisch die Definitions- und Wertemenge einfacher rationaler und irrationaler Funktionen. Außerdem definieren sie die Bijektion und erkennen sie an den Beispielen von Mengen, die durch Venn-Diagramme dargestellt werden, und bestimmen das Bild einer linearen und quadratischen Funktion. Die einfachen rationalen Funktionen sind von der Form  $f(x) = \frac{a}{bx+c}$ . Die einfachen irrationalen Funktionen haben die Form  $f(x) = \sqrt{ax + b}$ .

Im Bereich *"Analyse der grafischen Darstellung einer Funktion"* stellen die SchülerInnen Funktionen grafisch dar und bestimmen den Definitionsbereich, den Wertebereich und das Bild einer Funktion anhand ihres Graphen. Zum Beispiel:

"Zeichnen Sie Graphen für  $f(x) = \frac{1}{x}$  und  $f(x) = \sqrt{x}$  Bestimmen Sie den Funktionswert für einige Werte der Variablen  $x$ . Skizzieren Sie dann die Graphen ihrer Umkehrfunktionen, indem Sie die Funktionen auf die Linie  $\square = \square$  abbilden." Die SchülerInnen zeichnen einen Graphen einer quadratischen Funktion mit rationalen Koeffizienten. Sie bestimmen die Nullstelle, den Schnittpunkt mit der Ordinate, den Scheitelpunkt der Parabel, die Symmetrieachse und auch den Verlauf der Funktion. Sie lösen einfache quadratische Ungleichungen. Bei der grafischen Darstellung einer quadratischen Funktion erklären die SchülerInnen die Form der Funktion in Abhängigkeit von der Diskriminante und dem Leitkoeffizienten.

Der erweiterte Inhalt ist die Angabe einer Funktion aus dem Graphen. Zum Beispiel: Die SchülerInnen stellen grafisch eine Funktion der Form  $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$  mit Hilfe der Translation und eine Funktion der Form  $f(x) = ax^2 + bx + c$  durch die Methode der fünf Punkte (reeller Nullpunkt, Scheitelpunkt der Parabel, Schnittpunkt mit der Ordinate, Abbildung des Schnittpunktes über die Symmetrieachse). Die Aufgabenstellung umfasst Probleme mit Extremen und die Bestimmung der Schnittpunkte von quadratischen und linearen Funktionen. Zum Beispiel: "Durch die Verfolgung der Verkäufe eines Produkts wurde festgestellt, dass die Verkäufe durch eine quadratische Funktion  $f(x) = -\frac{3}{20}x^2 + 12x - 180$  beschrieben werden kann, wobei  $x$  der Preis des Produkts ist, und  $f(x)$  die Anzahl der verkauften Stückzahlen des Produkts zum Preis von  $x$ . Wie viele Produkte werden verkauft, wenn der Preis 30 Kuna beträgt? Wie viel wird der Händler verdienen? Bei welchem Preis wird der Verkauf dieses Produkts maximal sein?"

Das Thema Funktionen gewinnt im Laufe der Schulzeit immer mehr an Bedeutung. Zu Beginn sind die Zahlen das Hauptthema der mathematischen Bildung in der Schule mit ca. 50% der Lernzeit. Funktionales Denken macht 20% der Lernzeit aus. Am Ende der Periode ist der Umgang mit Funktionen das Hauptthema an kroatischen Schulen mit 45% der Lernzeit.

## 2.2. Curricula für Funktionen in Deutschland

Im allgemeinen Schulsystem in Deutschland gibt es drei Arten von Abschlüssen in der Sekundarstufe bis zum Alter von 16 Jahren. Sie alle befassen sich mit dem Konzept der Funktionen und verschiedenen Arten von Funktionen. In der folgenden Tabelle wird ein Überblick gegeben.

Tabelle 3: Curricula für Deutschland

| Art der Funktion<br><br>Grad der<br>Graduierung   | Anteil  | Linear   | Quadratisch   | Trigonometrisch   | Exponential   |
|---|---|--|---|---|---|
| "Hauptschulabschluss"<br>(niedriges Niveau)<br>Steht für die 9.<br>Abschlussklasse<br>(14,15 Jahre alt)       | Proportionale, antiproportionale und lineare Zuordnungen begrifflich unterscheiden und für Berechnungen verwenden | Arbeit mit linearen Funktionen   |   |   |   |
| "Mittlerer Schulabschluss"<br>(mittleres Niveau)<br>Steht für die 10.<br>Abschlussklasse<br>(15,16 Jahre alt) |   |  | Arbeit mit quadratischen Funktionen in verschiedenen Termdarstellungen  | periodische Prozesse mit der Sinusfunktion beschreiben  | das exponentielle Wachstum konzeptionell zu erfassen und für Berechnungen zu nutzen   |
| "Zulassung Oberstufe"<br>(hohes Niveau)   |   | Wachstumsprozesse mit Hilfe linearer Funktionen beschreiben Lösen von Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern | die Eigenschaften von quadratischen Funktionen beschreiben einfache Transformationen auf quadratische Funktionen anwenden unter Polynomgleichungen lösen, die | einfache Transformationen auf Sinusfunktionen anwenden die Kosinusfunktion als Ableitung der Sinusfunktion benennen | Wachstumsprozesse mit Hilfe von Exponentialfunktionen beschreiben einfache Transformationen auf Exponentialfunktionen anwenden die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion bilden die Eigenschaften von Exponentialfunktionen und die besonderen Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion Exponentialfunktionen verwenden, um Wachstums- und Zerfallsprozesse zu beschreiben |

|  |  |   |   |  |   |
|--|--|---|---|--|---|
|  |  | <p>rn<br/>oder<br/>Ersetz<br/>en in<br/>linear<br/>e<br/>Gleich<br/>ungen<br/>umwa<br/>ndeln<br/>lassen<br/>zu<br/>linear<br/>en<br/>Gleich<br/>ungen<br/>ohne<br/>digital<br/>e<br/>Hilfsm<br/>ittel.<br/>Werkz<br/>euge</p> | <p>durch<br/>einfache<br/>s<br/>Faktori<br/>eren oder<br/>Substitui<br/>eren in<br/>quadratis<br/>che<br/>Gleichun<br/>gen<br/>umgewa<br/>ndelt<br/>werden<br/>können<br/>zu<br/>quadratis<br/>chen<br/>Gleichun<br/>gen,<br/>ohne<br/>digitale<br/>Hilfsmittle<br/>, ohne<br/>digitale<br/>Beihilfen</p> |  | <p>und vergleichen Sie<br/>die Qualität der<br/>Modellierung<br/>beispielhaft mit<br/>ein begrenztes<br/>Wachstum</p> |
|--|--|---|---|--|---|

Im deutschen Lehrplan ist der Bereich der Funktionen eng mit dem Bereich der Gleichungen verbunden. Der Grundschulunterricht endet meist mit der vierten Klasse. In der Sekundarstufe befassen Sie sich mit dem Bereich der Funktionen in den folgenden zunehmenden Inhalten:

- 5. und 6. Klasse: Vorkonzepte für Beziehungen zwischen Größen; Verwendung einfacher Begriffe zur Beschreibung von Situationen; Lösen einfacher Probleme in realen Situationen mit Methoden wie systematischem Probieren.
- 7. und 8. Klasse: Konzept der Beziehungen zwischen Zahlen und Mengen; proportionale und antiproportionale Beziehungen; Prozentrechnung als Konzept der proportionalen Beziehung; Konzept des Terms; Konzept der linearen Gleichung in einfachen Situationen (z.B.  $2x+5 = 3$ ) mit verschiedenen Methoden zur Lösung von Gleichungen wie systematisches Probieren, Operationsmethoden und Umformung. Konzept der Funktion als spezielle Beziehung; proportionale und lineare Funktionen; Konzept der linearen Gleichungen und deren Lösung mit algebraischen und grafischen Methoden; Zusammenhang zwischen Funktion und Gleichung; System linearer Gleichungen.
- 9. und 10. Klasse: quadratische Funktionen; Variation der Parameter; Konzept der quadratischen Gleichungen und deren Lösung mit algebraischen und grafischen Methoden; Zusammenhang zwischen Funktion und Gleichung; Verhältnis und einfache Gleichungen mit Verhältnis.  
*optional:* Funktionssysteme (linear, quadratisch) und deren grafische und algebraische Lösung; andere Funktionstypen, die lineare und quadratische

Funktionen kontrastieren, wie z.B. Exponentialfunktionen in einfachen Zusammenhängen;  $\sin x$  als einfaches Beispiel einer periodischen Funktion.

Der Lehrplan umfasst zwei Hauptthemen: (1) Kalkül, (2) Beziehungen, Funktionen und Gleichungen. Die Bereiche (3) ebene Geometrie insbesondere mit Dreiecken und (4) Statistik haben im Vergleich zu (1) und (2) nicht die Bedeutung. (5) Die räumliche Geometrie steht am Ende der Bereiche.

In den Jahrgangsstufen 5 und 6 hat der Bereich der Relationen, Funktionen und Gleichungen einen Umfang von ca. 20% der mathematischen Lehrpläne. Im Bereich der Mengen und der ebenen Geometrie werden Vorannahmen getroffen. In den Jahrgangsstufen 7 und 8 hat dieser Bereich eine Ausdehnung von ca. 50%. Es ist das dominierende Thema in diesen Klassenstufen. Auch in den Klassen 9 und 10 hat dieser Bereich einen Umfang von 50%-60%. Der Umgang mit speziellen Gleichungen wird auch in der ebenen Geometrie eine Rolle spielen (z.B. Verhältnis zwischen den sich schneidenden Linien im Strahlensatz).

### 2.3. Curricula für Funktionen in Litauen

In den litauischen Schulen wird sich der Aufgabenbereich wie in der folgenden Tabelle dargestellt entwickeln.

Tabelle 4: Die Lehrpläne Litauens

|                                      | <b>Tabellen, Diagramme und Formeln verstehen und verwenden</b>  | <b>Anwendung von Funktionsmodellen und Eigenschaften</b>   | <b>Anwendung der Koordinatenmethode zur Beschreibung geometrischer Formen und zur Untersuchung ihrer Eigenschaften.</b> | <b>Grafische Lösung von Gleichungen, Ungleichungen und deren Systemen</b> | <b>Graphische Transformation</b> |
|--------------------------------------|---|--|---|---|----------------------------------|
| <b>5-6 Klassen (11,12 Jahre alt)</b> | Ablesen (Analysieren) der Abhängigkeiten zwischen zwei Größen, die in einfachen Diagrammen oder Tabellen dargestellt sind. In eigenen Worten erklären, was die Zahlen auf | Um die einfachsten Aufgaben des täglichen Inhalts zu lösen, bei denen die beiden Größen direkt proportional sind. Erklären Sie anhand von Beispielen für direkt proportionale Größen, wie man den Wert der einen Größe |   |   |                                  |



|                                       |   |  |  |  |  |
|---------------------------------------|---|--|--|--|--|
|                                       | <p>den Achsen Ox und Oy bedeuten. Ermittlung des Wertes einer Größe aus einem gegebenen Diagramm oder einer Tabelle, wenn der Wert einer anderen Größe angegeben ist.</p>   | <p>findet, wenn der Wert der anderen bekannt ist.</p>  |  |  |  |
| <p>7-8 Klassen (13, 14 Jahre alt)</p> | <p>Verwendung von Tabellen, Diagrammen und Formeln, die die Abhängigkeiten zweier Größen beschreiben, um einfache Probleme praktischen und mathematischen Inhalts zu lösen. Die Konzepte der unabhängigen und abhängigen Variablen in eigenen Worten erklären und wissen, wie sie bezeichnet werden. In einfachen Fällen anhand eines Diagramms, einer Formel oder einer Tabelle bestimmen, wie der Wert einer Größe zu ermitteln ist, wenn der Wert einer anderen Größe angegeben ist.</p> | <p>Sich auf Modelle und Eigenschaften der direkten oder umgekehrten Proportionalität, der Proportionalität stützen, um Lösungen für einfache Probleme unterschiedlichen Inhalts zu erklären. Sich daran erinnern, dass direkt proportionale Größen mit der Gleichung <math>y / x = k</math> und umgekehrt proportional mit der Gleichheit <math>x \cdot y = k</math> verbunden sind, Beispiele für Größen nennen, die mit solchen Abhängigkeiten verbunden sind. In den einfachsten Fällen, um die grundlegende Eigenschaft der Proportion anzuwenden. Zu verstehen, wie viele Punkte ausgewählt werden müssen, um eine Skizze eines Graphen der direkten und inversen Proportionalität zu</p> |  |  |  |



|  |  |   |   |  |   |
|--|--|---|---|--|---|
|  |  | zeichnen. Eine partielle Tabelle der Werte der direkten und inversen Proportionalität bei $x > 0$ zusammenstellen und vervollständigen, um Skizzen ihrer Graphen zu zeichnen. Um überprüfen zu können, ob der Punkt zum Funktionsplan gehört.   |   |  |   |
| 9-10<br>Klassen<br>(15,16)<br>Jahre<br>alt | Kombination verschiedener Ausdrucksweisen von Funktionen, Anwendung der Eigenschaften einer Funktion bei der Lösung einfacher Probleme praktischen und mathematischen Inhalts. Die Konzepte der unabhängigen Variablen (Argument) und der unabhängigen Variablen (Funktion) zu beschreiben und ihre Symbole zu schreiben. In einfachen Fällen anhand eines Diagramms, einer Formel oder einer Tabelle zu bestimmen, welche Größe unabhängig und welche abhängig ist, | Sich auf die Modelle und Eigenschaften der direkten oder umgekehrten Proportionalität, der linearen, quadratischen Funktion und der Eigenschaft der Proportion stützen, um die Lösungen einfacher Probleme verschiedenen Inhalts zu erklären. Erkennen von direkter oder umgekehrter Proportionalität, linearen und quadratischen Funktionen, die auf verschiedene Weise ausgedrückt werden, und Geben von Beispielen von Größen, die mit diesen Funktionen zusammenhängen.<br>Wenden Sie in einfachen Fällen die grundlegende Eigenschaft der Proportion an. Verstehen, wie viele Punkte | Formen im Koordinatensystem einzeichnen, eine symmetrische Form in Bezug auf den Punkt und die Linie zeichnen, die Position der Formen im Koordinatensystem in Zahlenpaaren beschreiben. Die Länge der Strecke und die Koordinaten des Mittelpunkts der Strecke zu bestimmen, wenn die Koordinaten der Enden der Strecke bekannt sind.<br>Um ein Zahlenpaar mit seinem Bild im Koordinatensystem zu verknüpfen. Um anzugeben, zu welchem Koordinatenviertel der Punkt gehört. Markieren Sie im Koordinatensystem einen Punkt, der zu einer gegebenen Linie oder einem gegebenen Punkt | Lineare Gleichungssysteme grafisch näherungsweise zu lösen. Grafische Annäherung an die Gleichungen $f(x) = a$ , $f(x) = g(x)$ und die Ungleichungen $f(x) \leq a$ , $f(x) \geq a$ , wobei $f(x)$ und $g(x)$ Funktionen direkter, inverser Proportionalität, linear, quadratisch sind und $a$ eine Zahl ist. Erläutern Sie das Wesen der grafischen Methode in Ihren eigenen Worten. Die ungefähre Lösung des linearen Gleichungssystems anhand des Graphen zu finden. Anhand des Beispiels zu erklären, wie man die Lösung einer Gleichung oder | Durchführung von Transformationen des Graphen $y = x^2$ : Streckung auf der Oy-Achse ( $y = ax^2$ ), Schübe auf der Ox- und Oy-Achse ( $y = x^2 + n$ und $y = (x - m)^2$ ), Symmetrie in Bezug auf die Ox-Achse ( $y = -x^2$ ); Zuordnung der Graphen-Transformationen zu den Veränderungen der Formel $y = x^2$ . Den Graphen einer Funktion umwandeln können, indem man den Schub des Graphen auf der Ox- und Oy-Achse, die Zugkraft (Druck) und die Symmetrie benutzt. |



|  |   |  |  |  |   |
|--|---|--|--|--|---|
|  | <p>und zu wissen, wie man den Wert der einen Größe findet, wenn der Wert einer anderen angegeben ist. Anhand der Grafik feststellen, ob die Abhängigkeit der beiden Größen funktional ist. Beispiele für Funktionen und Nicht-Funktionen geben. Erklären, wie man überprüft, ob ein Punkt zu einem Funktionsgraphen gehört. Aus dem Graphen die Bereiche der Funktionsdefinition und -werte, Intervalle der Zunahme, Abnahme, Stabilität der Funktionswerte, Maximal- oder Minimalwert der Funktion zu finden. Wissen, wie man herausfindet, mit welchen Argumenten eine Funktion einen bestimmten Wert annimmt, Funktionswerte sind positiv (oder negativ), wenn die Funktion in einem Diagramm oder einer</p> | <p>gewählt werden müssen, um die Formeln <math>y = kx + b</math>, <math>y = k/x</math> und <math>y = x^2</math>, <math>y = ax^2 + bx + c</math>, <math>y = a(x - m)^2 + n</math>; <math>y = a(x - x^1)(x - x^2)</math> Graphen von Funktionen zu zeichnen, um zu wissen, wie die Graphen heißen. Erklären, wie man den Ausdruck einer Funktion aus einem Graphen von linearen und quadratischen Funktionen schreibt.</p> | <p>symmetrisch ist, und überprüfen Sie, ob die beiden Figuren um den Koordinatenursprung, die Achsen <math>Ox</math> und <math>Oy</math>, symmetrisch sind. Um an einem Beispiel zu erläutern, wie man die Länge eines Segments findet, müssen die Koordinaten des Mittelpunkts des Segments bekannt sein, wenn die Koordinaten der Enden des Segments bekannt sind.</p> | <p>Ungleichung mit einer Unbekannten aus einem Graphen findet.</p> | <p>Wenn man z. B. den Graphen der Funktion <math>y = x^2</math> kennt, weiß man, wie man den Graphen der Funktion <math>y = a(x - m)^2 + n</math> zeichnet.</p> |
|--|---|--|--|--|---|



|                               |  |  |  |  |
|-------------------------------|--|--|--|--|
| Formel<br>ausgedrückt<br>wird |  |  |  |  |
|-------------------------------|--|--|--|--|

## 2.4. Curricula für Funktionen in Spanien

Im spanischen Schulsystem gibt es in Bezug auf die obligatorische Sekundarschulbildung (E.S.O.) vier Stufen, die bis zum Abschluss mit 16 Jahren führen und mit 12 Jahren beginnen.

Tabelle 5: Spaniens Lehrpläne Teil 1

|  | Alter            |         |
|--|------------------|---------|
| <b>Grundschulbildung</b>                           | 1. bis 6. Klasse | 6 - 12  |
| <b>Obligatorische Sekundarschulbildung (E.S.O)</b> | 1. Klasse        | 12 - 13 |
|  | 2. Klasse        | 13 - 14 |
|  | 3. Klasse        | 14 - 15 |
|  | 4. Klasse        | 15 - 16 |
| <b>Baccalaureat</b>                                | 1. bis 2. Klasse | 16 - 18 |

Die spanischen Lehrpläne in allen Kursen sind in fünf Lernblöcke unterteilt: I. "Prozesse, Methoden und Haltungen in der Mathematik", II. "Zahlen und Algebra", III. "Geometrie", IV. "Funktionen" und V. "Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung".

Die wichtigsten Themen, die in den einzelnen Kursen behandelt werden und insbesondere die Inhalte, die mit den Funktionen zusammenhängen, sind in der folgenden Tabelle aufgeführt:

Tabelle 6: Lehrpläne für Spanisch Teil 2

| Art der Funktion            | Konzept | Anteil | linear | quadratisch | trigonometrisch | exponentiell |
|-----------------------------|---------|--------|--------|-------------|-----------------|--------------|
| <b>Grad der Graduierung</b> |         |        |        |             |                 |              |



|  |  |   |    |   |   |   |
|--|--|---|----|---|---|---|
| <b>Grundschulbildung</b><br>(12-13) Jahre                            | Darstellung von Punkten in kartesischen Koordinaten  |   |    |   |   |   |
| <b>Obligatorische Sekundarschulbildung (E.S.O.)</b><br>(13-14) Jahre | Die abhängigen und unabhängigen Variablen sowie die Konzepte und Berechnungen von Wachstum, Zerfall, Maxima und Minima. Die SchülerInnen verwenden Proportionalitätsfunktionen ( $y=mx$ ), lineare Funktionen ( $y=mx + n$ ) und konstante Funktionen ( $y=k$ ). | Unterscheidung zwischen proportional, antiproportional und linear | Ja |   | $\sin x$<br><br>nicht allgemein   | $a \cdot b^x$<br><br>nicht allgemein                                  |
| <b>Baccalaureat</b><br>(15-16) Jahre                                 | Konzept und Merkmale: Bereich, Bereich, Schnittpunkte mit den Achsen, Kontinuität, Monotonie, Tendenz, Periodizität, Krümmung, Symmetrie   | Ja  | Ja | mit quadratischen Funktionen in verschiedenen Termdarstellungen arbeiten. | $a \cdot \sin(bx+c)+d$<br>Beschreiben Sie periodische Prozesse mit der Sinusfunktion. | $a \cdot b^x$<br>Konzept des exponentiellen Wachstums und Berechnung. |

## 2.5. Schlussfolgerung

Wie in den obigen Kapiteln gezeigt wurde, ist in den verschiedenen am EnLeMaH-Projekt beteiligten Ländern der Bereich der Funktionen das wichtigste mathematische Thema während der basierten Lernphase in der Sekundarstufe. Der unterschiedliche kulturelle Hintergrund der Partner lässt vermuten, dass dieser Stellenwert auch über die vier Länder hinaus bestehen wird. Darüber hinaus geben die gezeigten Lehrpläne Hinweise darauf, dass der mathematische Lernprozess in den verschiedenen Ländern in Bezug auf funktionale Konzepte und Funktionstypen in der Art und Weise der Ordnung und Anordnung ähnlich ist. Dies ist neben den länderspezifischen

Gesichtspunkten die Grundlage für eine gemeinsame Arbeit der LehrerInnen für aktives Lernen: die Anordnung der Lernfunktionen in der Schule ist recht ähnlich.

### 3. Aktives Lernen und Lehren im EnLeMaH-Projekt

In diesem Kapitel wird die Philosophie des aktiven Lernens in der Schule berücksichtigt. Dabei wird die Implementierung des aktiven Lernens in nationale Standards, in die LehrerInnenausbildung und in Universitätsprogramme berücksichtigt.

#### 3.1. Kroatische Philosophie

Laut dem kroatischen Lehrplan für das Fach Mathematik für Grundschulen und Gymnasien ab 2019 ([Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj \(nn.hr\)](#)) wird das Lernen und Lehren des Faches Mathematik durch die Verbindung von mathematischen Prozessen und Domänen erreicht. Diese Zweidimensionalität manifestiert sich in den Ergebnissen und trägt zum Erwerb von mathematischen Kompetenzen bei. Mathematische Prozesse sind: Darstellung und Kommunikation, Verknüpfung, logisches Denken, Argumentation und Inferenz, Problemlösung und mathematische Modellierung sowie Anwendung von Technologie. Die Bereiche der mathematischen Fächer sind: Zahlen, Algebra und Funktionen, Form und Raum, Messen und Daten, Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Dem Lehrplan zufolge ist es trotz der Entwicklung aller Konzepte und Prozesse notwendig, die Art und Weise, wie Mathematik gelernt und gelehrt wird, zu ändern und zu modernisieren und den SchülerInnen vielfältige und reichhaltige Lernerfahrungen zu bieten. Besonders wichtig sind die Fähigkeit, das Gelernte in einer Vielzahl von Problemsituationen anzuwenden und das Wissen, das eigene Lernen zu steuern.

Bei der Organisation des Lern- und Lehrprozesses wählt die Lehrkraft den Umfang und die Tiefe des Lernens aus und passt Probleme, Methoden und Strategien so an, dass sie den Bedürfnissen, Möglichkeiten und Interessen der SchülerInnen am besten entsprechen. Die Lehrkraft und Die SchülerInnen haben die Freiheit, die Materialien und Technologien auszuwählen, die das Lernen von Mathematik herausfordernd, abwechslungsreich und anregend gestalten und die Verwirklichung der angestrebten Lernergebnisse ermöglichen. Der Lehrplan betont, dass das Lehrbuch im modernen Mathematikunterricht Inhalte bereitstellt, die zur Erreichung der vorgeschriebenen Ergebnisse für alle Wissensstufen verwendet werden können, aber es schränkt die Planung des Lern- und Lehrprozesses oder die Art und Weise, wie er durchgeführt wird, nicht ein. Die Lehrkraft kann frei entscheiden, wie und in welcher Reihenfolge die Ziele erreicht werden und welche zusätzliche Literatur und Informationsquellen von den SchülerInnenn genutzt werden. Die Lehrkraft ist dafür verantwortlich, einen

innovativen Ansatz zu verfolgen, neue Wissensquellen zu erforschen und neue Technologien angemessen zu nutzen, um den Lern- und Lehrprozess zu vervollständigen.

Aus den obigen Ausführungen wird deutlich, dass der nationale Lehrplan nicht vorschreibt oder vorschlägt, wie bestimmte mathematische Inhalte unterrichtet werden sollten, und die Freiheit und Verantwortung der Lehrer bei der Gestaltung des Unterrichtsprozesses deutlich erhöht.

Das aktive Lernen, das einige von ihnen bereits im Unterricht eingesetzt haben, ist somit zu einem Thema für eine größere Zahl von Lehrkräften geworden, von denen viele Unterstützung bei ihren ersten Schritten mit einem neuen Unterrichtsansatz benötigen. Um ihnen zu helfen, gibt es Fachliteratur, insbesondere Texte, die sich mit dem Einsatz von aktivem Lernen im Mathematikunterricht befassen. Nachfolgend werden nur einige davon ausführlicher beschrieben.

### 3.1.1. Beispiele für enaktives Lernen in Kroatien

- MiŠ (Matematika i škola) - Mathematik und Schule (<https://mis.element.hr/>): MiŠ ist eine bildungsorientierte Zeitschrift, die sich an Lehrkräfte, Studierende und alle an der Mathematik Interessierten wendet. Die Zeitschrift erscheint viermal im Jahr. In den Artikeln werden verschiedene Themen zur Methodik des Mathematikunterrichts vorgestellt. Außerdem werden kreative und aktive Aktivitäten erläutert und die neuesten Erfahrungen im Bildungsbereich vorgestellt.

Beispiele für Arbeiten zum aktiven Lernen in MIŠ:

- Lučić, Rad s algebarskim pločicama (Arbeiten mit Algebra-Kacheln), Matematika i škola XXI (2020), 105; 207-210.
- B. Majdiš, Računanje površine s pomoću tangram slagalice (Flächenberechnung mit einem Tangram), Matematika i škola XXI (2020), 103; 102-10.
- A. Dika, Izračunavanje površine mnogokuta s pomoću točkaste mreže (Flächenberechnung mit einem Punktnetz), Matematika i škola XX (2019), 98; 137-144. <https://mis.element.hr/fajli/1709/98-11.pdf>
- P. Valenčić, Matematika - nužno potrebna za život (Mathematik - notwendig für das Leben), Matematika i škola XX (2018), 97; 68-71. <https://mis.element.hr/fajli/1691/97-04.pdf>
- I. Brozović, S. Rukavina, Zome Tool modeli (Zome Tool models), Matematika i škola XIX (2017), 92; 51-54. <https://mis.element.hr/fajli/1605/92-02.pdf>

- P. Valenčić, Od ideje do izrade drvenog nastavnog pomagala (Von der Idee zur Schaffung eines hölzernen Lehrmittels), Matematika i škola XIX (2017), 92; 55-60. <https://mis.element.hr/fajli/1606/92-03.pdf>
- S. Ježić, Božićna zvijezda - vertikalno povezivanje (Weihnachtsstern - vertikale Verbindung), Matematika i škola XIX (2017), 92; 68-72. <https://mis.element.hr/fajli/1609/92-06.pdf>
- T. Sabo, S. Rukavina, Origami i krivulje drugog reda (Origami und Kurven zweiter Ordnung), Matematika i škola XVIII (2016), 86; 20-22. <https://mis.element.hr/fajli/1486/86-05.pdf>
- M. Černivec, S. Rukavina, Radionica "Kombinatorne igre" (Workshop "Combinatorial games"), Matematika i škola XIII (2011), 61; 14-16. <https://mis.element.hr/fajli/1087/61-04.pdf>
- Poučak (<https://matematika.hr/izdanja/poucak/>): Poučak ist eine bildungsorientierte Zeitschrift für die Methodik des Mathematikunterrichts. Sie wurde von der Kroatischen Mathematischen Gesellschaft gegründet, die die mathematische Wissenschaft, den Mathematikunterricht auf allen Ebenen, die Anwendung der Mathematik in anderen Disziplinen sowie die Verbesserung der sozialen Stellung der MathematikerInnen insgesamt fördert. Die Zeitschrift erscheint viermal im Jahr.
- Matka (<https://matematika.hr/izdanja/matka/>): Matka ist eine Zeitschrift für Schüler der Grundschule und der unteren Klassen der Sekundarstufe, für ihre Lehrer und auch für Eltern. Es werden verschiedene Themen aus den Bereichen Geometrie, Arithmetik, Algebra und Geschichte der Mathematik behandelt. Darüber hinaus finden sich in der Zeitschrift auch Anwendungen der Mathematik in anderen Wissenschaften und in der Kunst, Aufgaben für begabte Schüler, mathematische Spiele und Rebus-Rätsel. Die Zeitschrift erscheint viermal im Jahr.
- Acta Mathematica Spalatensia (<https://amas.pmfst.unist.hr/ams/>): ist eine internationale Zeitschrift, die sich der Veröffentlichung von Artikeln aus allen Bereichen der reinen und angewandten Mathematik widmet. In der Zeitschrift werden Original-Forschungsarbeiten und hochwertige Übersichtsartikel veröffentlicht.

Die Entwicklung naturwissenschaftlicher und mathematischer Kompetenzen mit Hilfe aktiver Lernstrategien:

- S. Rukavina, B. Milotić, R. Jurdana-Šepić, M. Žuvić-Butorac, J. Ledić, Razvoj prirodnoznanstvene i matematičke pismenosti aktivnim učenjem (The Development of Scientific and Mathematical Literacy Using Active Learning Strategies), Udruga Zlatni rez, 2010.

- Das Buch "The Development of Scientific and Mathematical Literacy Using Active Learning Strategies" (Entwicklung naturwissenschaftlicher und mathematischer Kompetenzen mit Hilfe aktiver Lernstrategien) beschreibt die Herausforderungen für den Unterricht in den Naturwissenschaften und der Mathematik und weist auf die Bedeutung des aktiven Lernens hin. Das Buch enthält 12 Workshops - 6 Workshops zur Mathematik und 6 Workshops zur Physik.

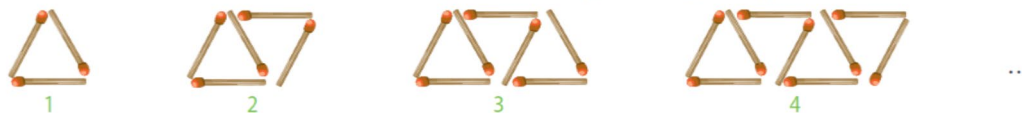
## 3.2. Deutsche Philosophie

Die nationalen Standards definieren für die SchülerInnen Prozesse und Aktivitäten, die die Orientierung für das Lernen von Mathematik sind. Die nationalen Standards für mathematisches Lernen basieren auf drei Grunderfahrungen von Winter (1996). Diese Erfahrungen können als (E1) Anwendungsorientierung, (E2) Strukturorientierung und (E3) Problemorientierung charakterisiert werden. Dabei meint Anwendungsorientierung (E1) nicht direkt die Vorbereitung auf bestimmte Lebenssituationen, sondern die Möglichkeit einer grundlegenden Einsicht in Natur, Gesellschaft und Kultur. Bei der Strukturorientierung (E2) geht es eher um die Analyse mathematischer Objekte in Bezug auf ein deduktives Weltbild. Die Problemorientierung (E3) hingegen betont den Erwerb heuristischer Fähigkeiten, um Muster in Problemlösungsprozessen zu erkennen und zu nutzen. Diese drei Aspekte sind jedoch miteinander verbunden.

Das schulische Lernumfeld im Fach Mathematik sollte es den SchülerInnen ermöglichen, diese Erfahrungen zu machen. Aktives Lernen kann als Teil von E1 und E3 gesehen werden, bei dem die SchülerInnen mit Mathematik als Teil von realen Situationen und Modellierungsprozessen in Berührung kommen. Um diese grundlegenden Erfahrungen zu ermöglichen, werden Kompetenzen als Ziel des mathematischen Lernens definiert. Die prozessorientierten Kompetenzen beschreiben zentrale Aktivitäten und Prozesse für die Entwicklung des mathematischen Verständnisses: mathematisches Argumentieren (K1), Problemlösen (K2), mathematisches Modellieren (K3), Verwendung mathematischer Darstellungen (K4), Verwendung symbolischer, formaler und technischer Elemente der Mathematik (K5) und mathematische Kommunikation (K6).

### 3.2.1. Beispiele für enaktives Lernen in Deutschland

7 Hier siehst du, wie ein Term für die dargestellte Folge aus Figuren gebildet wird.



| Schritt                 | 1                      | 2                            | 3                                | 4                                    |
|-------------------------|------------------------|------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|
| Anzahl<br>Streichhölzer | 3<br>$= 3 + 0 \cdot 2$ | $3 + 2$<br>$= 3 + 1 \cdot 2$ | $3 + 2 + 2$<br>$= 3 + 2 \cdot 2$ | $3 + 2 + 2 + 2$<br>$= 3 + 3 \cdot 2$ |

Anzahl der Streichhölzer beim n-ten Schritt:  $3 + (n - 1) \cdot 2$

- Erkläre die Bedeutung des Terms für die Schrittfolge in eigenen Worten.
- Begründe, dass zu der Folge auch der Term  $1 + n \cdot 2$  gehören kann. Zeige, dass beide Terme die Anzahl der Streichhölzer in gleicher Weise beschreiben.

Abbildung 7: Aktives Beispiel einer Exponentialfunktion

Im Bereich des aktiven Lernens werden in den nationalen Standards und Lehrplänen die folgenden Aspekte von Kompetenzen beschrieben:

- Mathematische Argumentation (K1):** Diese Kompetenz umfasst das Verstehen und Bewerten von mathematischen Beweisen, die Entwicklung von mathematischen Argumentationsketten und Annahmen.



Abbildung 6: Aktives Lernen in Lehrbüchern.

E-I-S-Prinzip von Bruner verbunden.

- Lösen von Problemen (K2):** Diese Kompetenz umfasst den Einsatz von Strategien und Heuristiken zur Lösung mathematischer Probleme und deren Anwendungen. Dies kann sowohl bekannte Strategien als auch das Ausprobieren und Verbinden neuer Strategien umfassen. Lösungspläne und Ergebnisse werden überprüft und kritisch reflektiert.

Diese Kompetenz beschreibt eine Metaebene des mathematischen Arbeitens. Im Hinblick auf enaktives Lernen können auch enaktive Strategien zum systematischen Beweisen mathematischer Probleme gefunden werden.

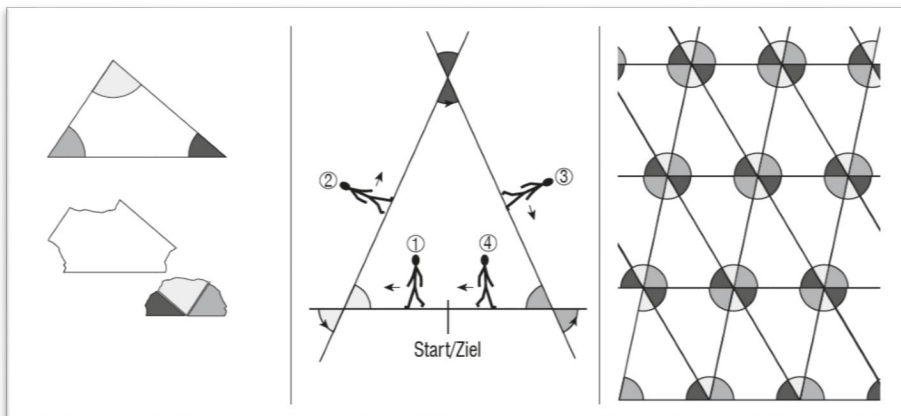


Abbildung 8: Enaktives Beispiel Summe der Winkel in einem Dreieck.

- **Mathematische Modellierung (K3):** Diese Kompetenz umfasst die Übersetzung zwischen Mathematik und realen Situationen, sowie die Konzepte, Methoden und Modelle.

Für das aktive Lernen ist diese Übersetzung zwischen der realen Welt und der mathematischen Welt ein zentraler Aspekt, um mathematische Konzepte und Modelle zu beschreiben, zu finden und zu verwenden, um eine bestimmte aktive Situation und Aufgabe zu verstehen.

- **Verwendung von mathematischen Darstellungen (K4):** Diese Kompetenz umfasst die Darstellung, die Auswahl, die Unterscheidung und die Erstellung von Darstellungsarten.

Beim aktiven Lernen ist das E-I-S-Prinzip von Bruner eng mit dieser Kompetenz verbunden.

- **Verwendung von symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik (K5):** Diese Kompetenz umfasst die Fakten und mathematischen Regeln, die Verwendung von Algorithmen für die algebraischen und geometrischen Operationen. Dabei ist der sinnvolle und reflektierte Einsatz von mathematischen Werkzeugen Teil dieser Kompetenz.

Beim aktiven Lernen steht das Lösen von aktiven Aufgaben, die Anwendung von mathematischen Regeln im Vordergrund.

- **Mathematische Kommunikation (K6):** Diese Kompetenz umfasst das Verstehen von mathematisch gegebenen mündlichen und schriftlichen Informationen. Darüber hinaus sind die Dokumentation von Lösungsplänen, die Verwendung mathematischer Konzepte in Bezug auf verschiedene Zielgruppen ebenfalls Teil dieser Kompetenz.

Beim aktiven Lernen berücksichtigt diese Kompetenz den Kommunikationsprozess: vom Verstehen der gegebenen Aufgaben oder Situation bis hin zur Dokumentation (z.B. die Verwendung oder Erstellung von mathematischen Videos).

### 3.3. Litauische Philosophie



Laut dem Projekt zum Mathematikprogramm (2021) spielt das Fach Mathematik in der Schule eine einzigartige Rolle bei der Entwicklung der Fähigkeiten der SchülerInnen in den Bereichen Rechnen, abstraktes und logisches Denken, visuelles und räumliches Denken, Datenanalyse und -interpretation sowie Abstraktionsvermögen.

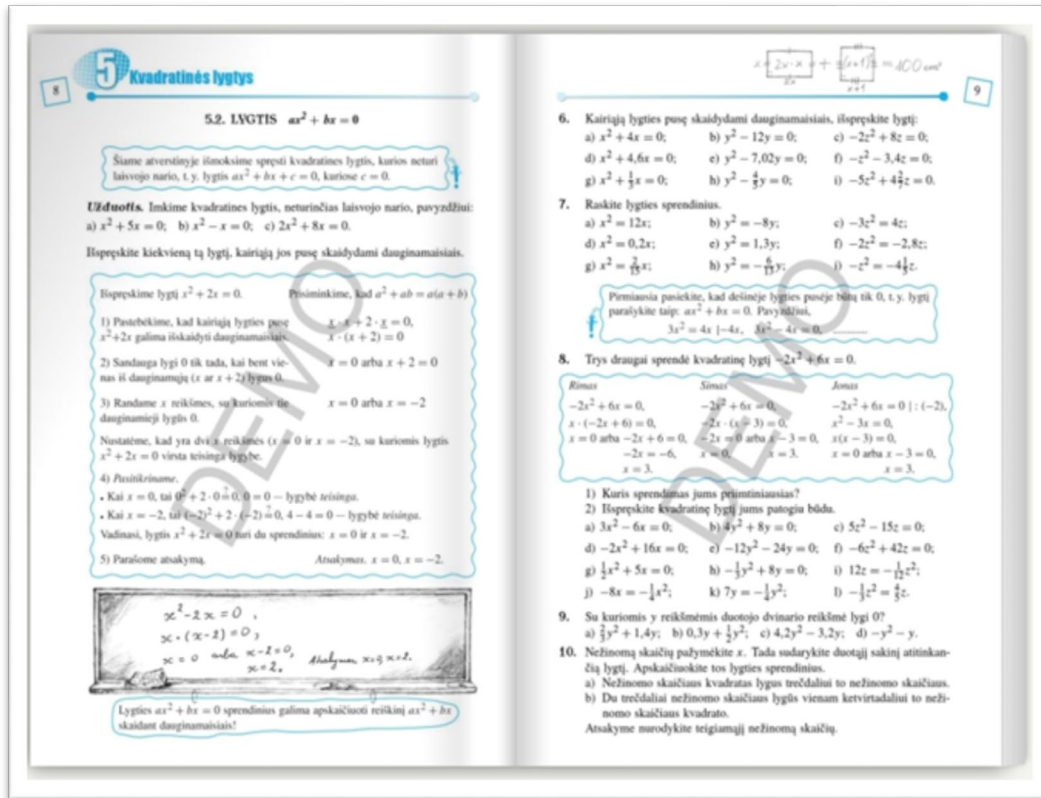
Die Ziele des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe sind wie folgt, SchülerInnen:

- Verwenden mathematische Begriffe richtig und zielgerichtet, erklären Zusammenhänge und zeigen sie auf;
- Führen mathematische Verfahren reibungslos durch;
- Erkennen mathematisches Denken in verschiedenen Kontexten und wenden es an;
- Organisieren seine/ihre Lernaktivitäten verantwortungsbewusst und effektiv;
- Verständigen sich effektiv in der mathematischen Sprache;
- Erkennen die Zusammenhänge zwischen Mathematik und anderen Fächern;
- Nutzen digitale Technologien zum Erlernen von Mathematik;
- Sind selbstbewusst, arbeiten zusammen, denken kritisch und wenden die erworbenen Kenntnisse und Fähigkeiten in Mathematik effektiv an, um Probleme zu lösen, die sie in einer Vielzahl von Zusammenhängen verstehen.

In allen Klassenstufen, von der ersten bis zur zwölften, werden die Leistungen der SchülerInnen in drei Leistungsbereichen bewertet: tiefes Verständnis und logisches Denken, mathematische Kommunikation und Problemlösung.

Doch obwohl das nationale Mathematikprogramm die Bedeutung der Entwicklung kreativer Denkkompetenzen betont, sind die meisten Mathematikstunden vom Standardtyp: Aufgaben und Aufträge aus Lehrbüchern/Handbüchern, die Lösungen werden vom Lehrer erklärt, zum Beispiel ein Auszug aus dem Lehrbuch für die 9. Klasse :

*Abbildung 9: Beispiele für kreatives Denken*



Allerdings können die Matheaufgaben auch praktische Aspekte haben, wie im Beispiel der Matheaufgabe für Innen der Klasse 8. Es wurde erklärt, wie die Schneeflocke von Koch hergestellt wird (aber sie wurden nicht aufgefordert, sie selbst herzustellen), und dann wurden sie gebeten, verschiedene Parameter zu berechnen. Bei einigen anderen Aufgaben wird verlangt, eine Lösung für eine bestimmte Lebenssituation zu finden, die in der Aufgabe erwähnt wird, z. B. die Berechnung einer Entfernung usw.

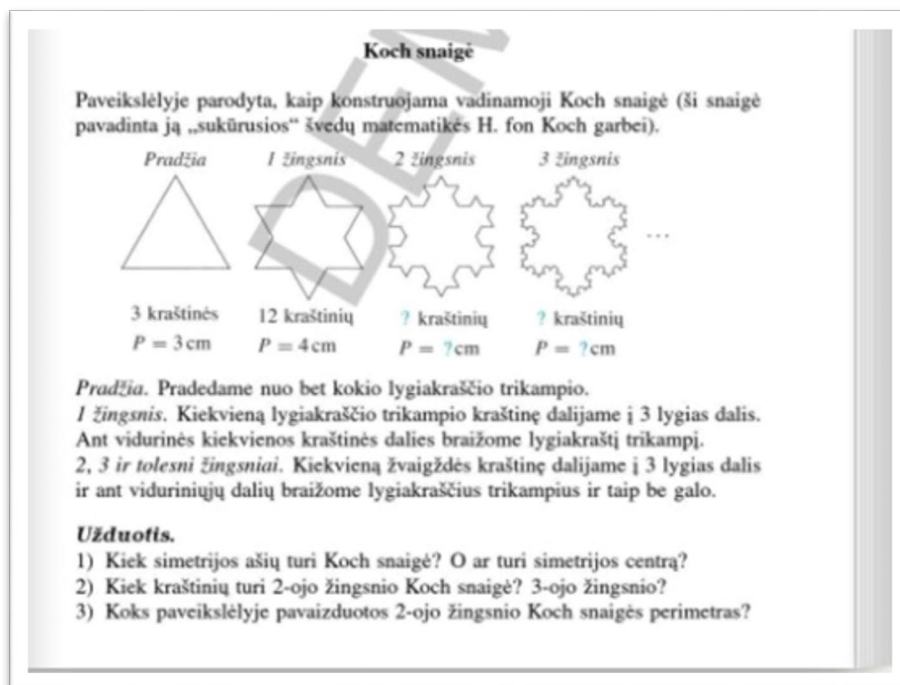


Abbildung 10: Beispiel für aktive Lernmethoden

Es gibt auch aktive Lernmethoden: Gruppenarbeit, Projektforschung, Wettbewerbe, Diskussionen, Anpassung von IT-Tools (Erstellung von Mind Maps, Quiz, Logikspiele, Kreuzworträtsel, Verwendung von 3D-Figuren usw.). Da Mathematikprüfungen jedoch in schriftlicher Form und mit vielen Berechnungen durchgeführt werden, besteht die Hauptaufgabe der MathematiklehrerInnen darin, den SchülerInnen das Verständnis und die Fähigkeiten zu vermitteln, wie man schnell rechnet und somit so viele Aufgaben wie möglich löst. GrundschülerInnen werden mehr aktive Aufgaben gestellt, weil sie mehr Zeit und Freiheit haben, an kreativen Aufgaben zu arbeiten - zu zeichnen, verschiedene Figuren zu machen usw.

Die Bedeutung und die Möglichkeiten, das Lehren und Lernen von Mathematik interessanter und kreativer zu gestalten, werden seit Jahrzehnten in der wissenschaftlichen Literatur analysiert, z.B. wie man eine Katze mit Hilfe von Linien und Funktionen zeichnet (für SchülerInnen der Klasse 9). Biekšienė, R., ir Zenkevičienė M. (2000). Aktyvaus mokymosi metodai matematikos pamokose.  $\alpha+\omega$ , Nr. 2, 52-56 (Abbildung 11):

**I koordinatiniamie ketvirtyje:**

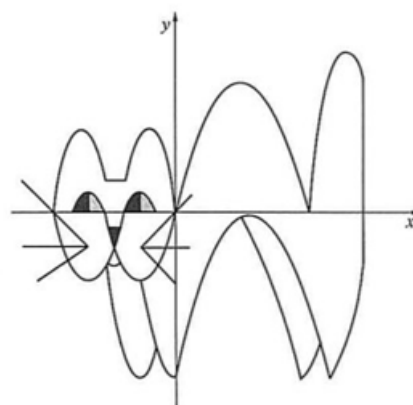
- 1)  $y = -\frac{1}{2}(x - 4)^2 + 8$ , kai  $0 \leq x \leq 8$ ;
- 2)  $y = -2(x - 10)^2 + 10$ , kai  $7,8 \leq x \leq 11$ ;
- 3)  $x = 11$ , kai  $0 \leq y \leq 8,2$ ;
- 4)  $y = x$ , kai  $0 \leq x \leq 1$ ;
- 5)  $y = -2(x + 1,5)^2 + 5,2$ , kai  $0 \leq x \leq 0,2$ .

**II koordinatiniamie ketvirtyje:**

- 1)  $y = -x - 7$ , kai  $-9 \leq x \leq -7$ ;
- 2)  $y = -2(x + 1,5)^2 + 5,2$ , kai  $-2,8 \leq x \leq 0$ ;
- 3)  $y = -2(x + 5,5)^2 + 5,2$ , kai  $-7,2 \leq x \leq -4$ ;
- 4)  $y = 2$ , kai  $-4 \leq x \leq -2,8$ ;
- 5)  $y = -2(x + 2)^2 + 1,2$ , kai  $-2,8 \leq x \leq -1,2$ ;
- 6)  $y = -2(x + 5)^2 + 1,2$ , kai  $-5,8 \leq x \leq -4,2$ ;
- 7)  $y = 0$ , kai  $-5,8 \leq x \leq -4,2$ ;
- 8)  $y = -5$ , kai  $0 \leq x \leq 1,2$  (nuspalvinkite dešiniąją akies pusę pilkai, o kairiąją – juodai);
- 9)  $y = 0$ , kai  $-2,8 \leq x \leq -1,2$ ;
- 10)  $x = -2$ , kai  $0 \leq x \leq 1,2$  (nuspalvinkite dešiniąją akies pusę pilkai, o kairiąją – juodai).

**III koordinatiniamie ketvirtyje:**

- 1)  $y = (x + 2)^2 - 4$ , kai  $-4 \leq x \leq 0$ ;
- 2)  $y = (x + 5)^2 - 4$ , kai  $-7,2 \leq x \leq -3$ ;
- 3)  $y = -1$ , kai  $-3,8 \leq x \leq -3,2$  (nuspalvinkite nosį juodai);
- 4)  $y = 2(x + 3,5)^2 - 3$ , kai  $-3,8 \leq x \leq -3,2$  (nuspalvinkite liežuvį pilkai);
- 5)  $y = 2x^2 - 10$ , kai  $-1,8 \leq x \leq 0$ ;
- 6)  $y = 2(x + 2)^2 - 10$ , kai  $-4 \leq x \leq -1$ ;
- 7)  $y = -2$ , kai  $-9 \leq x \leq -5$ ,  $-2 \leq x \leq 0$ ;



- 8)  $y = x$ , kai  $-2 \leq x \leq 0$ ;
- 9)  $y = -x - 4$ , kai  $-2 \leq x \leq 0$ ;
- 10)  $y = -x - 7$ , kai  $-7 \leq x \leq -5$ ;
- 11)  $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ , kai  $-8 \leq x \leq -5$ .

**IV koordinatiniamie ketvirtyje:**

- 1)  $y = -\frac{1}{2}(x - 4,5)^2$ , kai  $0 \leq x \leq 9$ ;
- 2)  $y = -\frac{1}{2}(x + 2,5)^2 + 1$ , kai  $4 \leq x \leq 7,4$ ;
- 3)  $y = 2(x - 9)^2 - 10$ , kai  $9 \leq x \leq 11$ ;
- 4)  $x = 11$ , kai  $-3 \leq y \leq 0$ ;
- 5)  $y = 2(x - 7,4)^2 - 10$ , kai  $7,4 \leq x \leq 8,5$ ;
- 6)  $y = -2$ , kai  $0 \leq x \leq 1$ .

Abbildung 12: Beispiel für kreatives Denken mit Diagrammen

Im Jahr 2020 haben nur 67,61 % der Kandidaten in Litauen die Matheprüfung bestanden (im Vergleich zu 2019 - 82,09 % der Kandidaten). Dies zeigt, wie wichtig es ist, einen aktiveren Lernansatz zu wählen, um ein besseres Verständnis für Mathematik zu erlangen, da gescheiterte SchülerInnen betonen, dass sie im Mathematikunterricht immer schlecht waren und nicht glauben, dass sie später viel Mathematik in ihrem Leben brauchen. Darüber hinaus sollten MathematiklehrerInnen einen systematischeren Ansatz für den aktiven Mathematikunterricht entwickeln, um den SchülerInnen die Bedeutung der Mathematik für ihr Leben zu vermitteln und ihre Kompetenzen im Bereich des mathematischen Problemlösens zu schulen.

### 3.4. Spanische Philosophie

In der Tendenz haben die Schulen in Spanien, ob privat oder öffentlich, ein ähnliches Unterrichtsmodell, in dem aktives Lernen keinen Platz hat. Nach einer gründlichen Suche nach Schulen, die mit einem aktiven Ansatz unterrichten, haben wir kaum Einrichtungen gefunden, die diesen Ansatz in ihrem Unterrichtsprozess verwenden. In diesem Sinne ist der Ansatz, der dem aktiven Lernen am ähnlichsten ist, die Montessori-Methode, die in Spanien zunehmend Anwendung findet.

In vielen Instituten und Schulen hat ein Wandel in der Pädagogik stattgefunden, da es zunehmend üblich ist, alternative Schulen zu finden, in denen das Lehren und Lernen über Emotionen und die Entwicklung anderer Intelligenzen stärker im Mittelpunkt steht und der Fokus über das theoretische Wissen hinausgeht, das in der Schule schon immer vorhanden war. Auf diese Weise und in Anlehnung an die oben erwähnte mangelnde Anwendung des enaktiven Ansatzes in spanischen Schulen, aber die zunehmende Offenheit in der Pädagogik, macht das EnLeMaH-Projekt in Spanien Sinn. Es ist für LehrerInnen geeignet, die ständig versuchen, neue Wege zu finden, um SchülerInnen zu betrachten und anzusprechen. Dieses Projekt wird ihnen neue Werkzeuge an die Hand geben, die sich in anderen Ländern bewährt haben.

Einige spanische Schulen und Institute beginnen, mit projektbasiertem Lernen zu innovieren, bei dem übergreifende Kompetenzen sowie die Erarbeitung von Lerninhalten und die Arbeit in Gruppen zunehmend geschätzt werden. Einige der Schulen und Institute in Spanien, die durch ihre Innovationen auffallen, sind:

- Escuela Ideo, Madrid: Sie arbeiten nach dem Modell des projektbezogenen Lernens. Gruppenarbeit zum Lernen und Learning by Doing sind zwei ihrer Kernpunkte.
- Fundación Myland, Sevilla: Diese Schule baut derzeit das Gebäude, in dem die Sekundarschule untergebracht werden soll. Ihre Pädagogik basiert auf Erfahrungslernen, das es den SchülerInnen erleichtert, sich Wissen durch praktisches Lernen anzueignen.
- Colegio San Gregorio, Plasencia: Subventioniertes Bildungszentrum mit SchülerInnen im Alter von 0 bis 18 Jahren. Das Ziel des Lehrpersonals ist es, das Lernen durch Projekte und aktive Methoden zu strukturieren. Die emotionale Erziehung wird gefördert und in der Grundschule wird die Heroes Tic-Methode angewandt, die die SchülerInnen zu Protagonisten ihrer Lernerfahrung macht. Das Hauptmerkmal ist, dass kooperative Gruppen eingesetzt werden und die Fortschritte der Kinder in digitalen Blogs der SchülerInnen festgehalten werden.
- Colegio Amara Berri: Die Bildungsmethodik des Zentrums besteht aus altersgerechten Zyklusprogrammen, und es wird besonders darauf geachtet,

den SchülerInnen Wege zur Organisation ihres Denkens und Methoden für dessen Entwicklung zu vermitteln sowie das Selbstwertgefühl der SchülerInnen zu stärken und die Teamarbeit zu fördern. Gamification und die praktische Anwendung von theoretischem Wissen spielen ebenfalls eine wichtige Rolle.

Es gibt viele Montessori-Schulen in Spanien, aber der Unterricht findet in der Regel bis zum Alter von 12 Jahren statt, d. h. obwohl die Methode dem aktiven Lernen sehr ähnlich ist, ist die Altersspanne nicht dieselbe.

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass das EnLeMaH-Projekt einen sehr bedeutenden und notwendigen Einfluss auf die spanische Pädagogik haben wird, da es den LehrerInnen zahlreiche Werkzeuge und Tipps an die Hand geben wird, mit denen sie ihre Inhalte an die Lernbedürfnisse ihrer SchülerInnen anpassen können, wodurch ihr Unterricht viel sinnvoller wird als bisher.

### 3.5. Schlussfolgerung

Wie in den verschiedenen länderspezifischen Philosophien erwähnt, lassen sich Unterschiede in der Art und Weise feststellen, wie aktives Lernen in der Schule begründet wird. Die Unterschiede können eher in der Art und Weise der Implementierung des aktiven Lernens liegen als in der Art und Weise, wie die Notwendigkeit des aktiven Lernens in der Schule unterstrichen wird. In allen Ländern ist der Prozess der Integration von LehrerInnen in diese Philosophie eine wichtige Frage für die Einführung des aktiven Lernens in der Schule. In diesem Bereich ist das EnLeMaH-Projekt Teil der Strategie und der Philosophie eines jeden Landes.

## 4. EnLeMaH und die Kriterien für eine enaktive Arbeit.

Auf der Grundlage von Kapitel 1 und 3 werden die folgenden Kriterien für enaktives Lernen im EnLeMaH-Projekt die Basis für die Gestaltung von enaktiven Lernsituationen sein. Dabei werden die Aspekte des enaktiven Repräsentationsmodus, der experimentellen Sichtweise und der Philosophie des enaktiven Lernens in den folgenden Kriterien gebündelt:

- **Reales Objekt:** Lernumgebungen müssen reale Objekte enthalten. (Computergestützte Aktivitäten (wie z. B. GeoGebra) gelten nicht als enaktive Aktivität).
- **Aktivität:** Handeln ist ein aktiver Prozess. Die Lernenden sollten keine passiven Rezipienten sein, sondern aktiv in den Lernprozess einbezogen werden (z. B. ein Experiment beobachten, aber nicht selbst durchführen). (Die Lernenden müssen an den Aktivitäten beteiligt sein.) Die SchülerInnen müssen bei jedem Schritt einer Aktivität aktiv sein.

- Lektion: Enaktive Aktivitäten können Teil jedes Lektionsteils sein (z.B. Einführung, Erlernen neuer Inhalte, Automatisierung, Abschluss...)
- Material: Greifbare Dinge müssen für die SchülerInnen zu Hause (oder im Unterricht) zugänglich sein
- Durchführung von enaktiven Aktivitäten zu Hause: Synchron (live) und asynchron (Selbststudium ohne Live-Präsentation). Das Setting für enaktives Lernen zu Hause bietet den Lehrkräften neben greifbarem Material auch die Möglichkeit, verschiedene Arten von Fernlernumgebungen zu schaffen.

## 5. Die Vorlage für die EnLeMaH

Die folgende Vorlage soll die Grundlage für die Dokumentation einer erstellten enaktiven Arbeit sein. Dabei werden Aspekte der Unterrichtspraxis und eine einfache Nutzung dieser Aktivität für Lehrkräfte aus anderen Ländern oder außerhalb des EnLeMaH-Projekts berücksichtigt. Die Dokumentation ermöglicht es den Lehrkräften, die Aktivitäten zu verstehen und für den eigenen Unterricht anzupassen.

Tabelle 7: Vorlage für das EnLeMaH

|   |
|---|
| <b>Name der Aktivität</b>                                     |
|   |
| <b>Zusammenfassung (Muttersprache)</b>                        |
|   |
| <b>Zusammenfassung (Englisch)</b>                             |
|   |
| <b>Zweck der Aufgabe</b> (Einführung, Übung, Wiederholung...) |
|   |
| <b>Lernergebnisse</b>   |
|   |
| <b>Vorkenntnisse der SchülerInnen</b>                         |
|   |



**Liste der Materialien**

**Voraussichtliche Dauer der Aktivität**

**Voraussichtliche Zeit für die Vorbereitung**

**Kurze Beschreibung der Tätigkeit** (die Beschreibung sollte entsprechend den Aufgaben in mehrere Teile unterteilt werden. Man sollte die Dauer jeder Aufgabe vorhersagen)

**Übungen für SchülerInnen** (sollten in einem separaten Dokument verfasst werden)

**Lösungsplan** (er sollte in einem separaten Dokument verfasst werden)

**Anmerkungen** (Hinweise, Schwierigkeiten, Klassenmanagement, Differenzierung, Möglichkeiten zur Erweiterung der Aktivität)



## Referenzen

- Brown, L. (2015). Researching as an enactivist mathematics education researcher. *ZDM Mathematics Education*, 47, 185-196.
- Bruner, J. S. (1966). Auf dem Weg zu einer Theorie des Unterrichts. Cambridge, Mass.: Belkapp Press.
- Coles, A., & Brown, L. (2013) Making distinctions in task design and student activity. In C. Margolinas (Ed.) *Task design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22* (pp. 183-192). <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054>
- Di Paolo, E. (2018). "Enactivismo". *En Diccionario Interdisciplinar Austral, editado por Claudia E. Vanney, Ignacio Silva y Juan F. Franck*. URL=<http://dia.austral.edu.ar/Enactivismo>.
- Francis, Krista & Khan, Steven & Davis, Brent. (2016). Enactivism, Spatial Reasoning and Coding. Digital Experiences in Mathematics Education. 2. 10.1007/s40751-015-0010-4.
- Maturana, H., & Varela, F. (1992). *Der Baum der Erkenntnis: Die biologischen Wurzeln des menschlichen Verständnisses*. Boston MA: Shambhala. (Erstausgabe erschienen 1987).
- Maturana, H. (1987), "Everything is Said by an Observer", en W. I. Thompson (ed.), GAIA, A Way of Knowing: Political Implications of the New Biology, Hudson, N.Y., Lindisfarne Press, S. 65-82.
- Lozano, María Dolores (2014). La perspectiva enactivista en educación matemática: todo hacer es conocer. *Educación Matemática*, 162-182. [Fecha de consulta 11 de Octubre de 2021]. ISSN: 0187-8298. Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40540854009>
- Reid, D. (1996). Enaktivismus als Methodologie. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the twentieth annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 203-210). Valencia: PME.
- Schunk, D. (2012). *Lerntheorien*. An educational perspective. Boston, Mass: Pearson.
- Varela, F., Thompson, E., & Rosch, E. (1991). *Der verkörperte Geist: Kognitions Wissenschaft und menschliche Erfahrung*. Cambridge: MIT Press.