EnLeMaH

Smjernice za iskustveno učenje matematike kod kuće

Projekt je financiran uz podršku Europske komisije.
Ova publikacija odražava jedino stavove autora i Komisija nije odgovorna za bilo koju uporabu koja proizlazi iz informacija sadržanih u publikaciji.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

UNIVERSITÄT BIELEFELD
Faculty of Mathematics

incoma

uniri

ST. IGNATIUS OF LOYOLA
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Sadržaj

1. Teorijski okvir prakse iskustvenog poučavanja i učenja 3
1.1. Uvod 3
1.2. Načela istraživanja u iskustvenom pristupu 4
1.2.1. Načelo 1: Posljedice znanja/činjenja 4
1.2.2. Načelo 2: povijest strukturalnog spajanja 5
1.2.3. Načela 3 i 4: višestruke perspektive i učinkovito djelovanje 6
1.3. Teorija kognitivnog rasta Jerome S. Brunera 6
1.4. Iskustveno učenje: Biološka osnova 8
1.5. Načela i ideje za dizajniranje aktivnosti za iskustveno učenje 10
1.6. Eksperimenti 11
1.6.1. Metoda "eksperiment" – razlike između predmeta 11
1.6.2. Matematički eksperiment kao proces 12
2. Sažetak kurikuluma 13
2.1. Kurikulum iz područja funkcija u Hrvatskoj 13
2.2. Kurikulum iz područja funkcija u Njemačkoj 17
2.3. Kurikulum iz područja funkcija u Litvi 19
2.4. Kurikulum iz područja funkcija u Španjolskoj 21
2.5. Zaključak 23
3. Iskustveno učenje i poučavanje u EnLeMaH projektu 24
3.1. Hrvatska filozofija 24
3.1.1. Primjeri iskustvenog učenja u Hrvatskoj 25
3.2. Njemačka filozofija 26
3.2.1. Primjeri iskustvenog učenja u Njemačkoj 27
3.3. Litvanska filozofija 28
3.4. Španjolska filozofija 32
4. EnLeMaH i kriteriji za iskustveno učenje 33
5. Predložak za EnLeMaH 34

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

1. Teorijski okvir prakse iskustvenog poučavanja i učenja

1.1. Uvod

Uvođenje iskustvenog pristupa u poučavanje matematike pomaže učenicima da izgrade mentalnu mrežu za razumijevanje matematičkih pojmova i odnosa te kako mogu koristiti matematiku u svom svakodnevnom životu i u svom poslu. Iskustveno učenje znači izvođenje aktivnosti, eksperimenata i konkretno rukovanje materijalom pri uvođenju novih matematičkih sadržaja, mentalnom predstavljanju matematičkih sadržaja i otkrivanju matematičkih odnosa.

Posljedično, iskustvene metodologije pomažu u povećanju razumijevanja i privlačnosti matematike [...] i, u širem kontekstu, pridonose smanjenju loših postignuća. Usvajanje iskustvenog pristupa matematici temelji se na dva glavna preduvjeta ili premise.

S jedne strane, učitelji moraju steći i biti opremljeni odgovarajućim pedagoškim vještinama za provedbu ove metodologije, posebice kada je riječ o njezinoj primjenjivosti u kontekstu digitalnog obrazovanja i osposobljavanja. S druge strane, može biti teško nabaviti potrebne materijale u trenutnom kontekstu koji je snažno pogođen krizom COVID-19, a posebno s obzirom na činjenicu da su nekoliko mjeseci bile zatvorene škole, a obrazovanje se odvijalo na daljinu.

EnLeMaH nastoji promovirati usvajanje inovativnih digitalnih pedagoških kompetencija za nastavnike matematike, što će im omogućiti da razviju znanja i vještine za:

a) Implementaciju metodologije iskustvenog poučavanja i učenja prilagođene kontekstu digitalnog obrazovanja koja doprinosi da matematika bude privlačnija za učenike u školi (12-16 godina);
b) Vođenje učenika u stvaranju, korištenjem kućanskih potrepština, iskustvenih materijala koji podržavaju njihove procese učenja, s posebnim naglaskom na učenje matematike u području funkcija.

U tu svrhu EnLeMaH razlikuje tri glavne faze Projekta. Prva faza (Intelektualni ishod 1) definirana je stvaranjem teorijskog okvira na kojem će se naknadno temeljiti stvaranje EnLeMaH tečaja za nastavnike matematike. Druga faza projekta (Intelektualni ishod 2) sastoji se od izrade nastavnih jedinica i materijala za tečaj za osposobljavanje nastavnika. Treća faza (Intelektualni ishod 3), paralelna s drugom fazom, je strukturiranje nastavnih jedinica u obliku online tečaja, EnLeMaH Teachers Training Course.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

U skladu s tim, ovaj dokument "Smjernice za iskustveno učenje matematike kod kuće" (Intelektualni ishod 1), obuhvaća:

● teorijski pristup iskustvenom učenju koji se temelji na radovima autora Maturana, Varela, Browna i na teoriji kognitivnog rasta uključujući načine prikaza Brunera

● njegove implikacije na poučavanje/učenje matematičkih sadržaja iz iskustvene perspektive;

● pregled sadržaja matematičkog kurikuluma (12-16 godina) u različitim zemljama partnerima ovog projekta;

● sažetak tradicije koju svaka od zemalja uključenih u projekt ima s iskustvenim pristupima u nastavi matematike i, konačno,

● kriterije koje EnLeMaH uspostavlja kako bi se aktivnost mogla klasificirati kao iskustvena.

Zajedno s ovim kriterijima, EnLeMaH predlaže obrazac koji treba slijediti u stvaranju novih aktivnosti iskustvenog učenja.

1.2. Načela istraživanja u iskustvenom pristupu

U ovom poglavlju razmatramo odnos između istraživanja i poučavanja. Za potrebe EnLeMaH-projekta ova gledišta su temeljna za razumijevanje učenja i poučavanja kroz iskustvene situacije. Naš pristup provođenju iskustvenog poučavanja koristi se Brownovim (2015.) načelima za istraživanje uz iskustveni pristup. U ovom ćemo poglavlju predstaviti njegova tri načela.

1.2.1. Načelo 1: Posljedice znanja/činjenja

Teorije iskustvenog učenja temelje se na biološkoj činjenici postojanja, a iskustveni se pristup sastoji od dva elementa (Brown, 2015):

- Percepcija se događa u opažajnoj vođenoj radnji i
- Kognitivne strukture proizlaze iz ponavljajućih senzomotornih obrazaca koji omogućuju perceptivno vođenje akcije. (Varela i sur. 1991., str. 172–173)

Dakle, “znanje je činjenje je učenje je postojanje”. Mi smo, doslovno, ono što činimo, naše nas okruženje stvara kao što mi stvaramo svoj svijet. (Brown, 2015).

Slika 1: Suradničke grupe koje dijele iskustvo

> Ovo nije individualna kognitivna struktura. Mi smo supojavni i tamo gdje postoji koordinacija radnji, kao u učionici, ili suradnička grupa u istraživačkom projektu, pojavljuje se kultura prakse koja je dovoljno dobra (učinkovita akcija) da se izvrši ono što treba učiniti. (Brown, 2015., str.189).

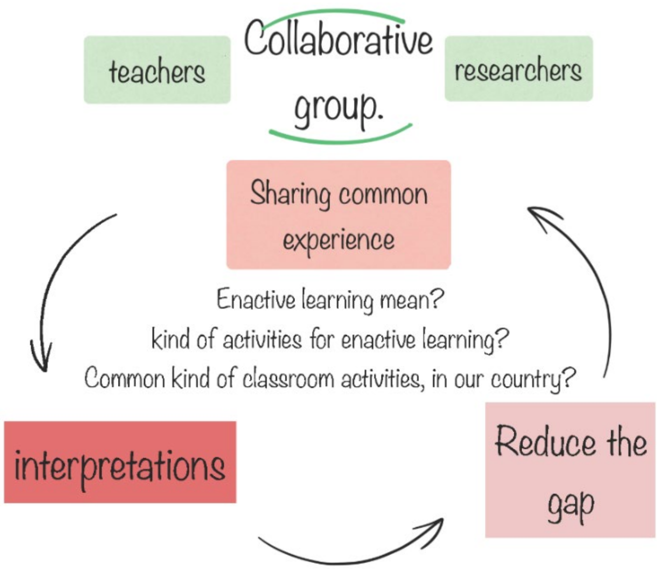
Tada mi, kao suradnička skupina istraživača i nastavnika, možemo podijeliti vlastita iskustva o učenju i podučavanju, omogućujući nam da pišemo i raspravljamo kako bismo dobili konačne zaključke (slika 1).

1.2.2. Načelo 2: povijest strukturalnog spajanja

Maturana i Varela (1992, str. 75) govore o "strukturalnoj sprezi kad god postoji povijest ponavljajućih interakcija koje vode do strukturne kongruencije između dva (ili više) sustava". Odnosno, potreba koju je izrazio netko drugi pokreće akciju koja pomaže u ispunjavanju mojih vlastitih potreba.

Kako možemo koristiti ideju strukturalnog povezivanja u suradničkim skupinama?
• Nema sigurnosti u podučavanju i učenju, ali…
• Ono što doživljavamo kroz svoje postupke je interpretacija, pa…
• "Dvije osobe ne mogu vidjeti istu stvar niti dijeliti istu svijest. Međutim, možemo komunicirati jer možemo razgovarati o detaljima zajedničkih iskustava i na taj način se jaz između interpretacija može smanjiti" (Brown, 2015., str.189).

Dakle, kada smo u mogućnosti podijeliti svoja iskustva i raspravljati na temelju pitanja potrebnih za naš projekt, jaz između naših tumačenja se sužava i ustupa mjesto zajedničkoj viziji.



Slika 2. Suradnička grupa u iskustvenom učenju

1.2.3. Načela 3 i 4: višestruke perspektive i učinkovito djelovanje

“Značaj postupanja iz višestrukih perspektiva i s njima, te stvaranja modela i teorija koje su dovoljno dobre za, a ne isključivo moguće” (Reid 1996, str. 207). Učinkovito je tehnička riječ u iskustvenim idejama, povezana s kognitivnim strukturama i učenjem, 'učinkovite' radnje korištene su kao 'dovoljno dobre' za učenje matematike djece i za potporu novim učiteljima u promišljanju i istraživanju.

Članovi suradničke skupine istraživača/nastavnika ne rade na 'odgovorima', već na proširenju našeg raspona mogućih učinkovitih praksi. U sljedećim poglavljima ovaj će raspon biti precizniji u području reprezentacija i biološke osnove za aktivno učenje.

1.3. Teorija kognitivnog rasta Jerome S. Brunera

Mislim da je plodonosno razlikovati tri sustava obrade informacija pomoću kojih ljudska bića izgrađuju modele svog svijeta: djelovanjem, slikom i jezikom (Bruner 1965, str. 1).

Kao što je Bruner gore naveo, pojedinci predstavljaju svoje učenje i svijet u kojem žive kroz akciju ako to ne mogu učiniti pomoću slika ili riječi. O učenju je pretpostavio da se bilo koji predmet može predavati u bilo kojoj fazi razvoja na način da se zadovolje njegove kognitivne sposobnosti. Da bi se naučila visokokvalificirana aktivnost, ona se mora „razložiti na jednostavnije komponente, od kojih svaku može izvesti manje vješt operater“ (Bruner 1964, str. 2). Prikazi su krajnji proizvod sustava kodiranja i obrade prošlih iskustava. Stoga je uveo model koji uključuje tri načina predstavljanja kao što je prikazano u tablici 1). Vjerovao je da ljudi svoje znanje predstavljaju na ta tri načina. Načini prikaza “nisu strukture, već uključuju različite oblike kognitivne obrade” (Schunk 2012, str. 457).

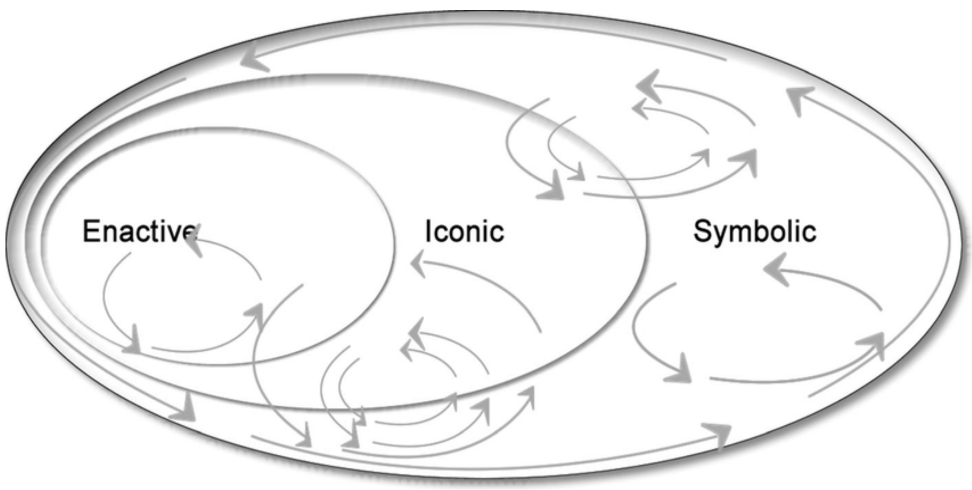
Tablica 1. Modeli prikaza

Ime načina reprezentacije	Opis	Primjer iz matematičke učionice
Iskustveni način prikaza	Sugerira da pojedinci predstavljaju svoje učenje i svijet u kojem žive kroz akciju ako ne mogu koristiti slike ili riječi. Učenik najbolje razumije svoju okolinu kroz interakciju s predmetima oko sebe.	Uporaba materijala da bi se prikazao matematički koncept. 

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Slikovni način prikaza		Sažima događaje selektivnom organizacijom propisa i slika, prostornim, vremenskim i kvalitativnim strukturama perceptivnog polja i njihovim transformiranim slikama.	Korištenje slika (npr. slika (matematičke) situacije, grafikona) za predstavljanje matematičkog koncepta.
Simbolički način prikaza	Verbalno-simbolički	Svaka riječ ima fiksni odnos prema nečemu što predstavlja.	Korištenje (zapravo izgovorene) riječi za predstavljanje matematičkog koncepta.
	Neverbalno-simbolički	Svaki simbol ima fiksni odnos prema nečemu što predstavlja.	Korištenje napisanih rečenica i matematičkih simbola (npr. jednadžbe) za predstavljanje matematičkog koncepta.

Za iskustveno učenje, ovi načini prikaza odgovaraju u procesu učenja (slika 3). Iskustvene situacije bit će prevedene u slikovne prikaze i odražavati se na tu situaciju. Osnova aktivnosti i/ili slikovni prikazi bit će osnova simboličke transformacije i obrnuto: simbolički načini će biti otkriveni u slikovnom i iskustvenom načinu.



Slika 3. Iskustveno, slikovno I simboličko kao ugniježđeni, međusobno uvjetovani i simultani (Francis, Khan, David, 2016, str.8)

Ovime se tri načina prikaza bave središnjim teorijskim aspektom EnLeMaH-projekta: Za razumijevanje i stvaranje iskustvenih aktivnosti učenja osnovno je razdvajanje između različitih načina. U sljedećem poglavlju dublje ćemo pogledati aspekte dizajniranja iskustvenog učenja.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

1.4. Iskustveno učenje: Biološka osnova

Prema Di Paolu (2018.), izraz iskustveno koristio se prije bioloških osnova koje danas oblikuju teoriju. Na primjer, Bruner (1966.), koristio je izraz iskustveno da bi uspostavio odnos između prikaza i tjelesnih aspekata koji pripadaju životnom iskustvu osobe. Trenutno se značenje iskustvenog temelji na radovima koje je započeo biolog Francisco Varela (1946.-2001.) i na radovima koji su provedeni zajedno s Maturanom (1980., 1987.). Danas ovu teorijsku perspektivu nastavljaju razvijati različite grupe istraživača koji su usmjereni na različita područja istraživanja: Brown, L., 2011., 2012., 2015. Coles, A., 2013., 2015. Di Paolo., 2005., 2018. Lozano , dr.med. 2004., 2015., da spomenemo samo neke.

Varela, Thompson i Rosch (1991.) upotrijebili su riječi 'iskustveno djelovanje' i 'iskustven' kako bi opisali nereprezentacijski popis spoznaje koji su postavili, spoznaju kao "utjelovljeno djelovanje". To se odnosi na dvije važne točke: (1) percepcija se sastoji u perceptivno vođenoj akciji i (2) kognitivne strukture proizlaze iz ponavljajućih senzomotornih obrazaca koji omogućuju da se radnja perceptivno vodi (Varela i sur. 1991., str. 172-173).

Stoga da bismo razumjeli što je iskustveno djelovanje, moramo razumjeti što je percepcija. Važno je napomenuti da se na percepciju ponekad gleda kao na pasivan proces (npr. kada svjetlost uđe u vaše oči i možete stvoriti sliku), ali u iskustvenom pristupu, percepcija je aktivan proces i bez djelovanja nema percepcije. S druge strane, ovaj aktivni proces određen je strukturom percepcije, na primjer: način na koji ptica percipira određenu situaciju vrlo je različit od načina na koji bi je osoba mogla percipirati.

S jedne strane, organizacija se shvaća kao odnosi koji moraju postojati između komponenti nečega da bi se prepoznala kao pripadnik određene klase, a s druge strane, struktura nečega se shvaća kao komponente i odnosi koji specifično čine pojedine jedinice koju njegova organizacija provodi (Lozano, 2014.). Maturana i Varela ističu da su živa bića sustavi u kojima se struktura kontinuirano mijenja, ali čija je organizacija očuvana (Maturana 1998a u Lozano, 2014). To se događa u posebnom načinu organizacije koji nazivaju samokreacija. Stoga je samokreativan sustav onaj koji unatoč tome što se stalno mijenja i proizvodi nove referentne sustave, za rezultat dobiva uvijek istog stvaratelja. Prema Maturi (1987), problem bi bio kako se nositi s problemom promjene strukture i pokazati kako organizam koji postoji u okruženju i koji djeluje adekvatno prema svojim potrebama, može prolaziti kroz kontinuirane strukturne promjene čak i ako se okoliš mijenja. Dakle, ovo bi mogla biti aproksimacija problema nastave matematike, student matematike je sustav koji se u svakom trenutku iznutra organizira. Svaki put kada do njega dođe neki poticaj (npr. matematički simbol), on se odmah ugrađuje u strukturu učenika, u njezino biće.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

S druge strane, prema Lozanu (2014), kada živa bića stupe u interakciju s okolinom u koju su uključena druga živa bića i postoji ponavljajuća interakcija između dvaju sustava, tada će se oba promijeniti na sličan način. Iz ove perspektive, mogli bismo reći da kada učenik u više navrata komunicira sa svojim učiteljem matematike i drugim učenicima, zajedno će stvoriti povijest interakcija. Stoga se na sličan način može mijenjati i struktura svih onih koji sudjeluju u ovoj nastavi, stvarajući nove oblike komunikacije i rada. Ako se to ne dogodi, onda strukturne promjene ne dovode do prilagodbe okolišu. Lozano (2014) daje jasan primjer za to: ako student opetovano pada na testovima iz matematike, u određenom kontekstu to može značiti da student mijenja studijsku grupu u kojoj se nalazi.

Važno za spomenuti je da svijet nije nešto što nam je dano, već nešto s čime se povezujemo kretanjem, dodirivanjem, disanjem i hranjenjem, to je ono što su Maturana i Varela nazvali spoznajom kao deaktivirajućom (Maturana i Varela, 1992.). Dakle, iskustveni pristup ukazuje da je naša mentalna aktivnost (misli, slike, emocije) ukorijenjena u radnjama koje provodimo sa svojim tijelima i kroz njih. S gledišta iskustvenog pristupa, učenje nastaje u aktivnoj interakciji s okolinom, pa se ne može smatrati apsorpcijom informacija, a spoznaja nije fenomen koji nastaje unutar glave ili tijela pojedinca, već proizlazi iz kontinuiranih interakcija s okolišem, koji je zauzvrat modificiran tim djelovanjem. U našem slučaju, društvo i kultura dio su našeg okruženja kao ljudskog bića.

Ova koncepcija iskustvenog pristupa s biološke točke gledišta, poziva nas na razmišljanje o važnosti vrste aktivnosti koje su odabrane za bavljenje sadržajem koji ima cilj učenja matematike. Općenito, postoji mnogo materijala koje možemo imati na raspolaganju, ali moramo uzeti u obzir kontekst u kojem se naši učenici razvijaju, vrstu okruženja i vrstu strukture koja ih čini. Odnosno, moramo pokušati stvoriti modele zadataka primjerenih razini naših učenika uz korištenje materijala koji im omogućuju korištenje tijela kao glavnog alata za razvoj novog učenja, a time i slike koje učenici stvaraju o aktivnosti, koje mogu sami doživjeti kroz vlastita djelovanja. Sve to mora biti popraćeno strategijama koje omogućuju dobar razvoj razrednih aktivnosti i dobro upravljanje okolinom s obzirom na individualne i grupne karakteristike.

Stoga je glavni cilj aktivnosti koje bi se trebale proizvesti u okviru ovog EnLeMaH projekta poštivati biološku viziju iskustvenog učenja, odnosno započeti s ciljevima učenja koji se mogu postići djelovanjem koje uključuje tijelo. Zatim se sa slikama i prikazima koje će učenici stvoriti kroz aktivnost, možemo osloniti na Brunerovu teoriju da napravi potrebne transformacije kako bi učenik povezao vlastite vizualizacije s drugim načinima prikaza, ne gubeći iz vida činjenicu da je stvaranjem učenikovog individualnog prikaza dana njegova vlastita percepcija izvedenih radnji.

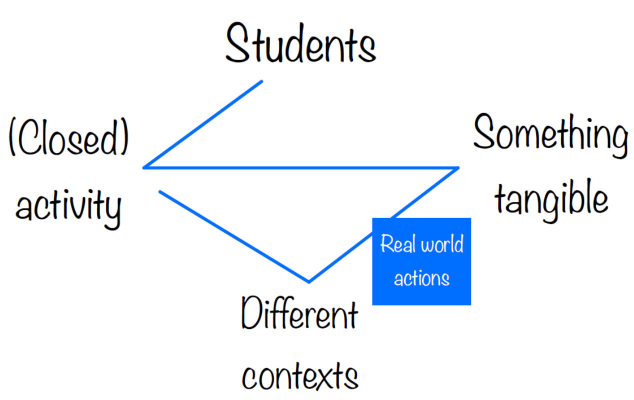
U sljedećem poglavlju možemo pronaći smjernice o strategijama koje se mogu koristiti pri odabiru aktivnosti za iskustveno učenje i koje također koriste Brunerovu teoriju za razumijevanje koncepata i miskoncepcija uz pomoć različitih načina prikaza.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

1.5. Načela i ideje za dizajniranje aktivnosti za iskustveno učenje

1. Započeti od (zatvorene) aktivnosti (koja može uključivati podučavanje nove vještine).
2. Razmotriti najmanje dva suprotna primjera (gdje je moguće, slike) i prikupljanje odgovora na 'zajedničkoj ploči'.
3. Zamoliti učenike da komentiraju što je isto ili različito u suprotnim primjerima i/ili da postave pitanja.
4. Pripremiti izazov u slučaju da nema pitanja.
5. Upoznavanje s jezikom i oznakama koji proizlaze iz učeničkih razlika.
6. Mogućnosti za učenike da uočavaju uzorke, stvaraju pretpostavke i rade na njihovom dokazivanju (dakle uključuju generaliziranje i algebru).
7. Mogućnosti za nastavnika da podučava daljnje nove vještine i za učenike da vježbaju vještine u različitim kontekstima.

Aktivnost će, gdje je to moguće, uključivati nešto vidljivo ili opipljivo i što svi učenici mogu učiniti. Izazov i prilika za poučavanje vještina u različitim kontekstima povezani su s moći koju ljudi imaju u ekstrakciji. Kada nešto radimo u različitim kontekstima, vjerojatnije je da možemo steći vještinu i zadržati je za korištenje drugi put. (Coles i Brown 2013, str. 186–187). Barem jedna moguća aproksimacija definicije iskustvenog učenja: „učenje je vidjeti više, vidjeti drugačije, u rekurzivnom procesu povezanom s radnjama u svijetu dajući povratne informacije koje vode do prilagođenih radnji sve dok ponašanja ne postanu učinkovita, to jest, ne stvaraju se perturbacije i djelovanje je stoga 'dovoljno dobro' za biti u svijetu" (Brown, 2015., str.190). Do sada smo istaknuli biološke osnove iskustvenog učenja, a slika 4 pokazuje nam mogući kontekst učenja. U sljedećem poglavlju vidjet ćemo kako se iskustvene baze mogu povezati s načinima prikaza koje je predložio Bruner, koji uzima iskustveno učenje kao osnovu da bi pokazao kako se znanje počinje razvijati.



Slika 4.Kontekst učenja

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Teorijski doprinos u prva tri poglavlja koji se bave različitim gledištima na iskustveno učenje je sljedeći: povezanost između istraživača i učitelja, vrsta načina prikaza i aspekti oblikovanja iskustvenog učenja. U sljedećem poglavlju razmatrat će se posebna vrsta aktivnosti: eksperiment kao središnja aktivnost za iskustveno učenje.

1.6. Eksperimenti

Eksperiment je znanstvena metoda kojom se prikupljaju informacije. Koristi se u školi, kao i na sveučilištu te također u više predmeta. Međutim, postoji razlika između pokusa iz matematike i drugih predmeta, o čemu ogovorimo u prvom odlomku. Matematički eksperimenti imaju dvije različite svrhe. Odvojeni koraci matematičkih eksperimenata mogu se vidjeti u drugom odlomku.

1.6.1. Metoda "eksperiment" – razlike između predmeta

Prema Kirchner i sur., postoje različite svrhe eksperimenata u prirodnim znanostima: prikupljanje znanja, demonstracija fenomena, davanje „primarnih iskustava" učenicima ili provjera odnosa ili modela (Kircher/Häußler/Girwidz, 2009.). Sve te namjene vode ka boljem razumijevanju prirode. Obično postoji do šest koraka za eksperiment iz prirodnih znanosti. Najprije se mora razjasniti predmet istraživanja. Nakon toga, kao drugi korak, učenici moraju prikupiti hipoteze. Treći i četvrti korak su planiranje i izvođenje eksperimenta. Tijekom izvođenja, mjerenje podataka važno je kako bi se ti podaci analizirali radi uspostavljanja korelacije između veličina. Ta analiza je peti korak i tek potom slijedi posljednji korak: interpretacija rezultata. U posljednjem koraku uspoređuju se rezultati i hipoteze. Sama interpretacija rezultata često vodi do drugog predmeta istraživanja, a time i do drugog eksperimenta. Iako postoje razlike između eksperimenata, npr. 'Hoće li ih izvesti učenici ili učitelj?' ili 'U kojoj je fazi nastave eksperiment integriran?' (Wiesner/Schecker/Hopf, 2017., str. 106-114), u prirodnim znanostima svaki je pokus o stvarnim predmetima.

Postoje sličnosti i razlike između matematičkih pokusa i eksperimenata u prirodnim znanostima. U oba slučaja eksperiment opisuje način prikupljanja znanja promatranjem kontroliranog djelovanja s 'objektima' (up. Ludwig/Oldenburg, 2007., str. 4). Proces eksperimentiranja u matematici uglavnom je identičan procesu u prirodnim znanostima. Ispitivanje nekoliko primjera ili rukovanje materijalom polazna je točka za učenike za izgradnju hipoteze, pa se drugi korak može zamijeniti s trećim i četvrtim korakom. Kako je potrebno dokazati matematičke činjenice, šesti korak interpretacije sugerira pristupe formalnom dokazu ili dovodi do ponavljanja eksperimenta u malo drugačijim uvjetima (Philipp, 2012, str. 27 ili Goy/Kleine, 2015, str.6). Konačno, matematički eksperimenti se mogu odvojiti od stvarnih objekata. Dakle,

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

eksperimentiranje u matematici zahtijeva od učenika da poznaje heuristiku i vodi ka kompetencijama usmjerenim na proces.

1.6.2. Matematički eksperiment kao proces

Kao što je već spomenuto, eksperimentiranje u matematici je ciklus koji se sastoji od različitih koraka. Pozivajući se na Philippa (2012) i Goya/Kleinea (2015), postoje četiri glavna koraka za matematičke eksperimente:

1. Postavljanje matematičkog problema/pitanja
2. Stvaranje hipoteza
3. Planiranje, izvršavanja i analiza eksperimenta (kratko: 'proba')
4. Razrada matematičkog modela, koncepta ili dokaza

Za svaki pokus navođenje matematičkog problema ili pitanja je prvi, a razrada modela, koncepta ili dokaza posljednji je korak. Redoslijed ostalih koraka može se promijeniti s obzirom na cilj eksperimenta. Ako eksperiment treba potvrditi ili opovrgnuti hipoteze, te se hipoteze moraju prvo generirati. Ako eksperiment ima za cilj da učenici nauče kako eksperimentirati ili izrađivati vlastite modele i koncepte, pokus se mora izvesti prije generiranja hipoteza (Goy/Kleine, 2015., str. 5f). Iako nije potrebno uvijek prikupljati hipoteze prije probe.

Heintz daje tri konteksta za matematičke eksperimente: otkriće, potvrđivanje i uvjeravanje (Philipp, 2012, str. 25). Kontekst otkrića odnosi se na stvaranje hipoteza i zamišljen je kao sustavno ispitivanje kako bi se istražili neidentificirani odnosi. Ovdje se znanje dobiva indukcijom. Inače, znanje se dobiva dedukcijom kada se određena hipoteza potvrdi matematičkim eksperimentom. U ovom slučaju eksperiment se postavlja u kontekst provjere valjanosti. Konačno, ako ni otkriće ni potvrđivanje nisu potrebni jer je odnos, koncept ili model već potvrđen, postoji još jedan kontekst za matematički eksperiment: uvjeravanje. U tom slučaju pokus će uvjeriti učenike u valjanost neke tvrdnje.

Na temelju teorijske pozadine, iskustveno učenje u okviru EnLeMaH-projekta može se opisati kao aktivnosti koje se izvode vlastitim rukama i koje učenicima omogućuju otkrivanje matematičkih odnosa ili dokazivanje matematičkih veza. Različite faze eksperimenta mogu biti smjernica za učitelje temeljena na načelima osmišljavanja eksperimenta, da organiziraju situaciju iskustvenog učenja.

Da bismo to učinili, s obzirom na ideju iskustvenog učenja i temeljni koncept eksperimenata u matematici, u nastavku ćemo pogledati školske kurikule svake zemlje koja je uključena u razvoj EnLeMaH-projekta, kako bismo osigurali da se kontekst dobro prenosi na odgovarajući školski sustav.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

2. Sažetak kurikuluma

U projektu *EnLeMaH* sudjeluju istraživači i nastavnici iz četiri različite države. U svrhu ovog projekta cilj je kreirati materijale za iskustveno učenje u području funkcija za učenike u dobi od 12 do 16 godina. U poglavljima koja slijede promotrit ćemo one dijelove nastavnog plana i programa za nastavni predmet Matematika za osnovne i srednje škole u državama koje sudjeluju u projektu, a koji se odnose na funkcije, s ciljem da se uspostavi osnova za iskustveno učenje u ovom području matematike.

2.1. Kurikulum iz područja funkcija u Hrvatskoj

Kurikulum za nastavni predmet Matematika za osnovne škole i srednje škole u Hrvatskoj podijeljen je na pet glavnih domena, a to su redom: (A) *Brojevi*, (B) *Algebra i funkcije*, (C) *Oblik i prostor*, (D) *Mjerenje* i (E) *Podatci, statistika i vjerojatnost*.

U domeni (B) *Algebra i funkcije* učenici definiraju funkcije i služe se različitim vrstama prikaza funkcija, grade algebarske izraze, tablice i grafove u svrhu generaliziranja, tumačenja i rješavanja problemskih zadataka. Upoznaju se sa svojstvima funkcija prepoznajući pravilnosti u preslikavanju i opisujući ovisnosti dviju veličina matematičkim jezikom. Oni modeliraju situacije zapisujući ih algebarskim jezikom, te rješavaju probleme iz stvarnoga života koji uključuju pravilnosti ili funkcijske ovisnosti. U sljedećoj tablici dan je pregled obrade pojmova vezanih uz funkcije za učenike u dobi od 12 do 16 godina (6. razred osnovne škole do 2. razreda gimnazije), utvrđeno prema nacionalnom planu i programu za nastavni predmet Matematika, koji je prethodio trenutno važećem Kurikulumu.

Tablica 2: Nastavni plan i program u Hrvatskoj koji se odnosi na gradivo povezano s funkcijama

Obrazovni ishodi		**Pojam funkcije**	**Grafički prikaz funkcije**	**Proporcija**	**Linearna funkcija**	**Kvadratna funkcija**
OSNOVNA ŠKOLA	**6. razred (11, 12 godina)**				Riješiti i primijeniti linearnu jednadžbu.	
	7. razred (12, 13 godina)	Dodatni sadržaj: Povezati linearnu zavisnost s linearnom funkcijom.	Grafički prikazati linearnu zavisnost.	Primijeniti proporcionalnost i obrnutu proporcionalnost.	Riješiti i primijeniti linearnu jednadžbu. Primijeniti linearnu zavisnost. Dodatni sadržaj: Riješiti jednostavnu linearnu nejednakost.	

	8. razred (13, 14 godina)				Riješiti i primijeniti linearnu jednadžbu. Riješiti i primijeniti sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice.	Riješiti i primijeniti kvadratnu jednadžbu oblika $x^2 = k$.
GIMNAZIJA	**1.razred (14,15 godina)**	Prepoznati i analizirati svojstva linearne funkcije.	Analizirati graf linearne funkcije. Povezati različite prikaze linearne funkcije.	Primijeniti proporcionalnost i postotke.	Primijeniti linearnu jednadžbu i sustav linearnih jednadžbi. Primijeniti linearnu nejednadžbu. Povezati različite prikaze linearne funkcije. Primijeniti linearnu funkciju pri rješavanju problema.	
	2. razred (15,16 godina)	Definirati i analizirati pojam funkcije i njezina svojstva.	Analizirati grafički prikaz funkcije.			Riješiti i primijeniti kvadratnu jednadžbu. Primijeniti kvadratnu funkciju.

U nastavku slijedi detaljniji opis ishoda navedenih u gornjoj tablici.

6. i 7. razred osnovne škole: Učenici rješavaju problemske zadatke na način da ih zapisuju u obliku linearne jednadžbe s koeficijentima iz skupa cijelih brojeva, kao i iz skupa racionalnih brojeva. U šestom razredu svode složeniju linearnu jednadžbu na oblik $ax = b$ s koeficijentima a i b koji poprimaju vrijednosti iz skupa cijelih brojeva ili iz skupa nenegativnih racionalnih brojeva.
Zatim, učenik u 7. razredu složeniju linearnu jednadžbu, primjenom ekvivalencija jednadžbi, svodi na oblik $ax + b = 0$ s koeficijentima a i b koji poprimaju vrijednosti iz skupa racionalnih brojeva, te ju rješava uz provjeru. Također, oni rješavaju i jednostavne linearne jednadžbe s apsolutnom vrijednošću. Naglasak je na oblikovanju jednadžbi iz zadanog problema i na njihovu rješavanju uz provjeru točnosti i smislenosti rješenja, te raspravi rješenja. Kao prošireni sadržaj je rješavanje jednostavne linearne nejednadžbe. U problemskim zadacima koji proizlaze iz svakodnevnog života učenici prepoznaju i analiziraju proporcionalnost i obrnutu proporcionalnost, te određuju i interpretiraju koeficijent proporcionalnosti i obrnute

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

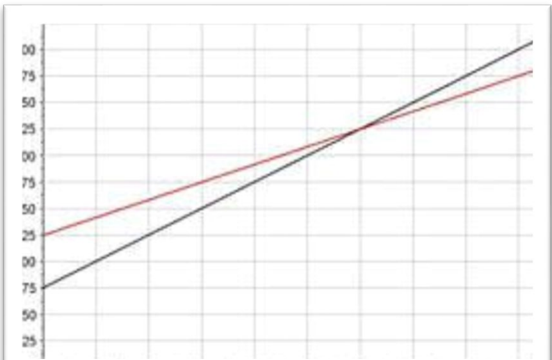
proporcionalnosti. Učenici povezuju koeficijent proporcionalnosti s omjerom dviju proporcionalnih veličina. Preporuka je poticati intuitivan pristup u rješavanju problema proporcionalnosti i obrnute proporcionalnosti. Isto tako, učenici računaju i objašnjavaju značenje složenih mjernih jedinica (kao na primjer: km/h, m/s, g/cm^3, kg/m^3, stanovnika/km^2), te preračunavaju valute. Ishodom „*Primijeniti linearnu zavisnost*“ ne provjerava se računanje, već način na koji učenik analizira problem i njegova sposobnost logičkog zaključivanja. Učenici proučavaju međusobno zavisne veličine, linearnu ovisnost zapisuju u obliku algebarskog zapisa, te tumače grafički prikaz linearne ovisnosti i analiziraju promjene. Za linearno zavisne podatke učenici oblikuju tablicu pridruženih vrijednosti, te grafički prikazuju linearnu zavisnost i kao rezultat uspostavljaju vezu između linearne zavisnosti i linearne funkcije.

8. razred osnovne škole: U zadanim problemskim zadacima učenik prepoznaje mogućnost rješavanja problema sustavom dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama. U slučaju ako je taj sustav složeniji, svodi ga na standardni oblik i rješava zadanom/proizvoljnom metodom. Osim toga, učenik diskutira o egzistenciji dobivenoga rješenja (jedinstvenost, nepostojanje, beskonačno mnogo rješenja).

Učenik opisuje kvadratnu jednadžbu oblika $x^2 = k$, gdje je k nenegativan racionalni broj, te ju primjenjuje za rješavanje problemskih situacija i u svrhu prikazivanja veličina matematičkim formulama. Isto tako tumači postojanje dvaju rješenja te kvadratne jednadžbe.

1.razred (gimnazijski program): Učenik zapisuje zadani problem u obliku linearne jednadžbe ili sustava linearnih jednadžbi, te ih rješava i diskutira postojanje rješenja jednadžbe ovisno o parametrima. Osim toga, rješava linearne nejednadžbe i sustave linearnih nejednadžbi s jednom nepoznanicom, te rješenje zapisuje s pomoću intervala. Dio proširenog sadržaja je rješavanje jednostavnije linearne jednadžbe i linearne nejednadžbe s apsolutnom vrijednošću.

Osim toga, učenik povezuje različite prikaze linearne funkcije. Zadanu linearnu funkciju prikazuje tablično i grafički, učenik zatim opisuje utjecaj koeficijenata na položaj grafa, definira i određuje nultočku. Iz grafa čita argumente i vrijednosti, te određuje i interpretira koeficijente kao i samu funkciju. Iz zadanih elemenata (argumenta i vrijednosti, točke grafa, koeficijenta) učenik određuje funkciju. Prošireni sadržaj je crtanje grafa funkcije apsolutne vrijednosti. Učenik primjenjuje linearnu funkciju pri rješavanju problema. Pritom iz zadanih podataka u nekoj problemskoj situaciji prepoznaje linearnu ovisnost i zapisuje ju kao linearnu funkciju, te primjenjuje



Slika 5: Osmisliti zadatak iz zadanog grafa

za analizu problema. Osim toga, učenik analizira problem iz njegovog grafičkog prikaza kao što je sljedeći primjer zadatka otvorenog tipa. „*Osmislite zadatak koji je prikazan zadanim grafom (Slika 5)*:“

2.razred (gimnazijski program): Učenik učinkovito rješava kvadratnu jednadžbu i provjerava rješenja, te argumentira prirodu rješenja kvadratne jednadžbe. Primjerice, „*Ne rješavajući jednadžbu* $3x^2 + 4x - 1 = 0$ *odredite prirodu njezinog rješenja.*“ Osim toga, učenik primjenjuje diskriminantu pri određivanju rješenja kvadratne jednadžbe. Rješavaju se jednadžbe koje se svode na kvadratnu jednadžbu: bikvadratne jednadžbe, sustavi koji se svode na kvadratnu jednadžbu i iracionalne jednadžbe. Prošireni sadržaj je primjena Vièteovih formula.

Kod ishoda „*Analizirati funkciju*“ učenik računa funkcijsku vrijednost polinomne, racionalne i iracionalne funkcije te objašnjava pojam funkcije. U zadacima računski određuje domenu jednostavnih racionalnih i iracionalnih funkcija, te određuje sliku linearne i kvadratne funkcije. Jednostavne racionalne funkcije oblika su $f(x) = \frac{a}{bx+c}$. Jednostavne iracionalne funkcije oblika su $f(x) = \sqrt{ax+b}$. Osim toga, prepoznaje bijekciju u skupu funkcija prikazanih pomoću Vennovih dijagrama.

Za ishod „*Analizirati grafički prikaz funkcije*“, učenici grafički prikazuju funkcije, te na grafičkom prikazu određuju domenu, kodomenu i sliku funkcije. Na primjer: „*Treba grafički prikazati funkcije* $f(x) = \frac{1}{x}$ *i* $f(x) = \sqrt{x}$ *određujući funkcijsku vrijednost za neke vrijednosti varijable* x*. Zatim, potrebno je skicirati graf inverzne funkcije preslikavajući funkciju preko pravca* $y = x$*.“* Posebno, učenici crtaju graf kvadratne funkcije s racionalnim koeficijentima. Pritom određuju nultočke, sjecište s ordinatnom osi, tjeme parabole, os simetrije, te tijek kvadratne funkcije. Prilikom crtanja grafa kvadratne funkcije učenici objašnjavaju oblik grafa funkcije u ovisnosti o diskriminanti i vodećem koeficijentu. Osim toga, rješavaju i jednostavne kvadratne nejednadžbe.

Jedan od ishoda povezanih s temom funkcija za 2.razred spada i određivanje funkcije iz njenog grafa. Na primjer, učenici će grafički prikazati funkciju oblika $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ koristeći translaciju kao i funkciju oblika $f(x) = ax^2 + bx + c$ metodom pet točaka (nultočke, tjeme parabole, sjecište s ordinatom, preslikavanje sjecišta s ordinatnom osi preko osi simetrije). Osim toga, problemska situacija uključuje probleme s ekstremima te određivanje sjecišta kvadratne i linearne funkcije. Na primjer: „*Praćenjem prodaje nekoga proizvoda ustanovljeno je da se prodaja može opisati kvadratnom funkcijom* $f(x) = -\frac{3}{20}x^2 + 12x - 180$ *gdje je* x *cijena proizvoda, a* $f(x)$ *broj prodanih komada proizvoda po cijeni* x*. Koliko će se proizvoda prodati ako je cijena 30 kuna? Koliko će pritom trgovac zaraditi? Za koju će cijenu prodaja toga proizvoda biti maksimalna? Itd.“*

Teme iz domene (B) *Algebra i funkcije* postaju sve važnije kako se prelazi u viši razred. Na početku danog pregleda su teme iz domene (A) *Brojevi* glavna tema matematičkog obrazovanja i obuhvaćaju otprilike 50% vremena predviđenog za poučavanje učenika, dok je otprilike 20% poučavanja predviđeno za funkcije. Međutim, u zadnjem razredu srednjoškolskog obrazovanja teme iz domene *Algebra i funkcije* obrađuju se u još većem opsegu i obuhvaćaju više od 50% nacionalnog kurikuluma.

2.2. Kurikulum iz područja funkcija u Njemačkoj

U redovnom školskom sustavu u Njemačkoj postoje tri stupnja u srednjoškolskom obrazovanju učenika do 16 godina. Svi se bave pojmom i različitim vrstama funkcija, te u sljedećoj tablici donosimo njihov kratki pregled.

Tablica 3: Nastavni plan i program u Njemačkoj na temu funkcija

Vrsta funkcije **Razina obrazovanja**	**Proporcionalnost**	**Linearna**	**Kvadratna**	**Trigonometrijska**	**Eksponencijalna**
„Hauptschulabschluss“ (niža razina) **9.razred (14,15 godina)**	Razlikuju pojmove proporcionalnost, obrnuta proporcionalnosti i linearnosti, te ih primjenjuju pri rješavanju zadataka.	Obrađuju linearnu funkciju.			
„Mittlerer Schulabschluss“ (srednja razina) **10.razred (15,16 godina)**			Obrađuju kvadratnu funkciju s različitim oblicima zapisa.	Opisuju periodičke procese pomoću funkcije sinus.	Obrađuju eksponencijalni rast i koriste ga pri rješavanju zadataka.
„Zulassung Oberstufe“ (viša razina)		Opisuju procese rasta pomoću linearne funkcije. Rješavaju jednadžbe višeg stupnja koje se svode na linearne jednadžbe pomoću faktorizacije ili	Opisuju svojstva kvadratne funkcije. Pri rješavanju jednadžbe višeg stupnja, primjenjuju jednostavne transformacije (faktorizacija ili supstitucija) koje svode na kvadratne jednadžbe	Primjenjuju jednostavne transformacije na funkciju sinus. Imenuju funkciju kosinus kao derivaciju funkcije sinus.	Opisuju procese rasta pomoću eksponencijalne funkcije. Primjenjuju jednostavne transformacije na eksponencijalnoj funkciji. Računaju derivaciju osnovne eksponencijalne funkcije.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

		supstitucije bez korištenja digitalnih pomagala.	bez korištenja digitalnih pomagala.		Opisuju svojstva eksponencijalne funkcije, posebno za osnovnu eksponencijalnu funkciju. Primjenjuju eksponencijalnu funkciju prilikom opisivanja procesa rasta i procesa raspadanja, te uspoređuju kvalitetu modela s ograničenim rastom.

U Njemačkom su kurikulumu funkcije usko povezane s jednadžbama. Njihovo osnovnoškolsko obrazovanje uglavnom završava s 4. razredom. U srednjoškolskom obrazovanju tema funkcija postaje od sve većeg značaja i opsega, kao što to navodimo u nastavku.

5. i 6. razred: obrada osnovnih pojmova koji se odnose na relacije između veličina; korištenje jednostavnih izraza za opisivanje situacija; rješavanje jednostavnih problema iz svakodnevnog života metodama sustavnog pokušavanja.

7. i 8. razred: obrada odnosa između brojeva i veličina; obrada proporcionalnosti i obrnute proporcionalnosti; računanje s postocima kao primjer proporcionalnosti; obrada jednostavnog oblika linearne jednadžbe (na primjer $2x + 5 = 3$) i njezino rješavanje različitim metodama kao što je metoda sustavnog pokušavanja, operativne metode i metoda transformacije. Zatim, obrađuju pojam funkcije kao posebne relacije, pojam linearne funkcije, te pojam linearne jednadžbe i njihovo rješavanje na algebarski i grafički način. Povezuju pojam funkcije i jednadžbe, a osim toga obrađuju i sustav linearnih jednadžbi.

9. i 10. razred: obrada kvadratne funkcije; varijacije parametara; obrada pojma kvadratna jednadžba i njezino rješavanje na algebarski i grafički način; povezivanje funkcije i jednadžbe; omjer i jednostavne jednadžbe s omjerom. *Dodatni sadržaj*: sustav funkcija (linearna i kvadratna) i njihovo rješavanje na algebarski i grafički način; jednostavne eksponencijalne funkcije; funkcija sinus kao jednostavan primjer periodične funkcije.

U Njemačkom kurikulumu dvije su glavne teme: (1) *računanje*, (2) *relacije, funkcije i jednadžbe*. Za razliku od njih, od puno manjeg značaja su teme (3) *geometrija ravnine*

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

(osobito trokuti) i (4) *statistika*, dok se tema (5) *geometrija prostora* obrađuje kao posljednja.
U 5. i 6. razredu gradivo koja se odnosi na (2) *relacije, funkcije i jednadžbe* obuhvaća otprilike 20% kurikuluma, u 7. i 8. razredu obuhvaća otprilike 50%, dok u 9. i 10. razredu dodatno se povećava njegova zastupljenost na 50-60%. Također, posebne vrste jednadžbi pojavljuju se prilikom obrade gradiva iz geometrije u ravnini (na primjer: *Talesov poučak o proporcionalnim dužinama*).

2.3. Kurikulum iz područja funkcija u Litvi

U sljedećoj tablici dan je pregled obrade matematičkog gradiva koje se odnosi na temu funkcija u obrazovnom sustavu u Litvi.

Tablica 4: Nastavni plan i program na temu funkcija u Litvi

	Tablice, grafovi i formule (razumijevanje i upotreba koncepta)	**Modeli funkcija i svojstva funkcija (primjena)**	**Analiza geometrijskih oblika (pomoću koordinata)**	**Grafičko rješavanje jednadžbi, nejednadžbi i sustava**	**Transformacija grafa**
5. i 6. razred (11,12 godina)	Analizirati zavisnost dviju veličina danih pomoću tablice ili grafa. Objasniti značenja vrijednosti na osi apscisa i osi ordinata. Odrediti vrijednost jedne veličine dane u tablici ili na grafu u ovisnosti o vrijednosti druge veličine.	Riješiti jednostavne zadatke s proporcionalnosti. Navesti primjere proporcionalnih veličina i objasniti kako se određuje vrijednost jedne veličine u ovisnosti o vrijednosti druge, njoj proporcionalne veličine.			
7. i 8. razred (13, 14 godina)	Pomoću tablice, grafa ili formule opisati zavisnost dviju veličina i riješiti jednostavne problemske zadatke. Objasniti koncept zavisnih i nezavisnih varijabli, te ih zapisati	Primijeniti svojstva proporcionalnosti i obrnute proporcionalnosti na jednostavnim problemskim zadacima. Zapisati proporcionalne veličine u obliku jednadžbe			

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

	matematičkim simbolom. Za jednostavne primjere odrediti vrijednost jedne veličine ako je poznata vrijednost druge veličine pritom koristeći se formulom, grafom ili tablicom.	$\frac{y}{x} = k$, te obrnuto proporcionalne veličine u obliku jednadžbe $x \cdot y = k$ i navesti primjere veličina koje su u takvom odnosu. Odrediti koliko je točaka potrebno za skicirati graf koji predstavlja dvije veličine koje su proporcionalne ili obrnuto proporcionalne. Napraviti ili upotpuniti tablicu s vrijednostima za veličine koje su proporcionalne ili obrnuto proporcionalne.			
9. i 10. razred (15,16 godina)	Na različite načine prikazati funkciju. Primijeniti svojstva funkcije prilikom rješavanja jednostavnih problemskih zadataka. Definirati pojam nezavisne varijable (argumenta) i pojam zavisne varijable (funkcije) i zapisati ih pomoću matematičkih simbola. Za jednostavne primjere, odrediti koja je veličina zavisna, a koja nezavisna, koristeći se danim grafom, formulom ili tablicom. Iz danog grafa odrediti da li je zavisnost dviju	Primijeniti svojstva proporcionalnosti i obrnute proporcionalnosti, te svojstva linearne i kvadratne funkcije. Prepoznati proporcionalnost, obrnutu proporcionalnost, linearnu funkciju i kvadratnu funkciju u različitim kontekstima u kojima mogu biti zadani. Navesti primjere veličina koje se mogu izraziti pomoću spomenutih funkcija. Argumentirati koliko je točaka potrebno kako bi se skiciralo grafove funkcija zadanih izrazima: $y = kx + b$,	Nacrtati geometrijski lik u Kartezijevom koordinatnom sustavu, te nacrtati njemu simetričan lik s obzirom na danu točku ili pravac i pritom opisati položaj tih likova u koordinatnom sustavu. Odrediti duljinu dužine, koordinate polovišta dužine za zadane vrijednosti koordinata krajnjih točaka te dužine. Uređenom paru brojeva pridružiti točku u koordinatnom sustavu, te	Riješiti sustav linearnih jednadžbi pomoću sjecišta pripadnih pravaca. Skicirati graf funkcije $f(x) = a$ i označiti dijelove ravnine za koje vrijede nejednakosti $f(x) \leq a$, $f(x) \geq a$, gdje su f i g funkcije koje odgovaraju proporcionalnosti, obrnutoj proporcionalnosti, linearne ili kvadratne funkcije pri čemu je parametar a realan broj. Pomoću grafa navesti primjer kojim se objašnjava kako se rješava	Transformirati graf funkcije $y = x^2$ do grafa funkcije $y = a(x - m)^2 + n$. Argumentirati taj postupak transformacije .

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

	danih veličina funkcionalna. Navesti primjere funkcija. Objasniti kako se provjerava da li neka točka pripada grafu funkcije, te iz grafa odrediti tijek funkcije (njezinu domenu, područje vrijednosti i intervale monotonosti, te ekstreme funkcije).	$y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = a(x-m)^2 + n$, $y = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$. Iz grafa linearne ili kvadratne funkcije objasniti koji je algebarski zapis pripadne funkcije.	navesti u kojem se kvadrantu ona nalazi. Zadanu točku zrcaliti s obzirom na dani pravac ili točku, te usporediti koordinate dobivenih točaka. Pojasniti na primjeru kako se određuje duljina dužine, koordinate polovišta dužine, u slučaju kada su poznate koordinate krajnjih točaka te dužine.	jednadžba ili nejednadžba s jednom nepoznanicom .	

2.4. Kurikulum iz područja funkcija u Španjolskoj

U obrazovnom sustavu u Španjolskoj, što se tiče obaveznog srednjeg obrazovanja (E.S.O), postoje četiri razine koje obuhvaćaju uzrast učenika od 12 do 16 godina.

Tablica 5: Kurikulum u Španjolskoj, 1.dio

	Uzrast (godine)	
Osnovno obrazovanje	1-6. razred	6 – 12
Obavezno srednjoškolsko obrazovanje (E.S.O)	1.razred	12 – 13
	2.razred	13 – 14
	3.razred	14 – 15

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

	4.razred	15 – 16
Prvostupnik	1-2. razred	16 – 18

Španjolski nastavni plan i program za sve kolegije raspoređeni su u pet domena učenja: I. "*Procesi, metode i stavovi u matematici*", II. „*Brojevi i algebra*“, III. „*Geometrija*“, IV. "*Funkcije*" i V. "*Statistika i vjerojatnost*".

Glavne teme koje se obrađuju u svakom kolegiju, a posebno sadržaj vezan uz funkcije, mogu se pronaći u sljedećoj tablici.

Tablica 6: Kurikulum u Španjolskoj, 2.dio

1. razred	**12-13**
Općenito**:** Učenici stvaraju grafičke prikaze kako bi objasnili promatrani proces uz korištenje tehnologije. Također, izračunavaju vrijednosti numeričkih izraza pomoću elementarnih operacija i pomoću potenciranja s nenegativnim cjelobrojnim eksponentom pazeći na prioritet u izvođenju matematičkih operacija. Primjenjuju pravila za djeljivost prirodnih brojeva s 2, 3, 5, 9 i 11 kako bi ih rastavili na proste faktore. Osim toga, učenici određuju najveći zajednički djeliteli i najmanji zajednički višekratnik prirodnih brojeva, te suprotne brojeve i apsolutne vrijednosti danih brojeva. Na kraju, učenici interpretiraju aritmetičko i geometrijsko značenje Pitagorinog poučka i primjenjuju ga. Posebno za funkcije: Učenici organiziraju podatke u tablicama, kao i u Kartezijevom koordinatnom sustavu na način da identificiraju pripadne točke koje odgovaraju podacima u tablici. Uočavaju proporcionalnost putem analize danih podataka u tablici. Također, učenici navode protuprimjere, odnosno primjere veličina koje nisu proporcionalne.	
2.razred	**13-14**
Općenito: Učenici računaju s cijelim brojevima i potenciraju ih. Također, provode operacije s brojevima u dekadskom i seksagezimalnom brojevnom sustavu, te operacije s razlomcima. Pitagorin poučak je također dio kurikuluma za 2.razred, kao i proučavanje geometrijskih tijela. Osim toga, učenici izvode izračune iz vjerojatnosti i čitaju statističke grafikone. Posebno za funkcije: Učenici se upoznaju s pojmom funkcije, zavisnom i nezavisnom varijablom, te s pojmovima rasta, pada i ekstremima funkcije, te njihovim računanjem. Osim toga, koriste nekoliko funkcija: afinu funkciju ($y = mx + n$), linearnu funkciju ($y = mx$), i konstantnu funkciju ($y = k$).	
3.razred	**14-15**

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Općenito: Učenici rješavaju problemske zadatke pomoću jednadžbi prvog i drugog stupnja i sustava dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice. Zatim, identificiraju i opisuju svojstva geometrijskih likova i elementarnih geometrijskih tijela. U temama posvećenim statistici učenici uče analizirati podatke dane kroz odgovarajuće tablice i grafikone sa zaključcima koji predstavljaju promatranu populaciju. Posebno za funkcije: Učenici nastavljaju raditi na pojmu funkcije, grafu kao načinu predstavljanja odnosa između dviju varijabli, te ostalim osnovnim pojmovima vezanim uz funkcije kao što su nezavisne i zavisne varijable. Na ovoj razini učenici interpretiraju zadanu funkciju iz danog grafa i obratno, danoj funkciji pridružuju njezin graf. Osim toga, obrađuju tijek funkcije, njezin rast i pad, te ekstreme. Također, prepoznaju i ispituju neprekidnost i trend funkcije. Nastavni plan i program također uključuje obradu periodičnih funkcija,	
4.razred	**15-16**
Općenito: Na ovoj razini učenici računaju nultočke polinoma i faktoriziraju ih pomoću Ruffinijevog pravila. Također, provode operacije s polinomima i jednostavnim algebarskim razlomcima, te rješavaju jednadžbe drugog stupnja pomoću faktorizacije i koriste osnovnu trigonometriju za rješavanje problema. Oni su sposobni rješavati trokute koristeći trigonometrijske omjere. Također, obrađuju koordinate točaka i vektore. Učenici računaju opseg i površinu trokuta, četverokuta, kruga itd., kao i udaljenost točaka i modul vektora. Također, objašnjavaju i grafički prikazuju linearni, kvadratni, proporcionalni i eksponencijalni odnos između dviju veličina. Posebno za funkcije: Učenici produbljuju pojam funkcije, grafičkog prikaza funkcije, tablice s vrijednostima i analitičkog izraza ili formule; međusobni odnos grafičkog i analitičkog izraza za funkciju; pojam domene funkcije kao i ograničenja na domenu funkcije. Oni računaju domene različitih funkcija i analiziraju njihova svojstva, te promatraju neprekidnost, rast, pad i ekstreme funkcije, kao i trend i periodičnost funkcije. Osim toga, na ovoj se razini proučava prosječna stopa varijacije, kao i prosječna stopa varijacije funkcije na intervalu.	

2.5. Zaključak

Kao što je prikazano u gornjim poglavljima, tema funkcija postaje najvažnija tema za vrijeme srednjoškolskog obrazovanja učenika u različitim državama koje sudjeluju u EnLeMaH-projektu. Zbog različitosti u kulturološkim pozadinama tih država možemo pretpostaviti da će jednaka važnost ove teme funkcija postojati i izvan te četiri države. Štoviše, prikazani nastavni planovi i programi daju naslutiti da su procesi učenja pojmova povezanih s funkcijama u različitim državama slično raspoređeni i strukturirani. To je zapravo temelj za zajednički rad nastavnika u pripremi materijala za iskustveno učenje unatoč postojanju različitih gledišta specifičnih za pojedinu državu.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

3. Iskustveno učenje i poučavanje u EnLeMaH projektu

U ovom poglavlju promatrat će se filozofija iskustvenog učenja u školi. Razmotrit će se provedba iskustvenog učenja u okvirima nacionalnih standarda, u programima osposobljavanja nastavnika i sveučilišnim programima.

3.1. Hrvatska filozofija

Prema Kurikulumu za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj iz 2019. godine (Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (nn.hr))
Učenje i poučavanje nastavnoga predmeta Matematika ostvaruje se povezivanjem matematičkih procesa i domena. Navedena dvodimenzionalnost očituje se u ishodima učenja i doprinosu stjecanja matematičkih kompetencija. Matematički su procesi: prikazivanje i komunikacija, povezivanje, logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje, rješavanje problema i matematičko modeliranje, te primjena tehnologije. Domene predmeta Matematika su: *Brojevi, Algebra i funkcije, Oblik i prostor, Mjerenje,* te *Podatci, statistika i vjerojatnost.*

Prema kurikulumu, unatoč razvoju svih koncepata i procesa, postoji potreba za promjenom i modernizacijom načina učenja i poučavanja matematike, te za pružanjem učenicima raznovrsnih iskustava učenja. Naročito je važna sposobnost primjene naučenog u raznim problemskim situacijama, kao i znanje za reguliranje vlastitog učenja.

U organiziranju procesa učenja i poučavanja, nastavnik odabire opseg i dubinu učenja te prilagođava probleme, metode i strategije koje najbolje odgovaraju potrebama, mogućnostima i interesima učenika. Učitelj i učenici imaju autonomiju u odabiru materijala i tehnologija koje će učenje matematike učiniti izazovnim, raznolikim i poticajnim, te koje će omogućiti ostvarivanje planiranih ishoda učenja. Kurikulum ističe činjenicu da udžbenik u suvremenoj matematičkoj učionici pruža sadržaje koji se mogu koristiti za postizanje propisanih ishoda učenja za sve razine znanja, ali ne ograničava planiranje procesa učenja i poučavanja, niti način njegovog izvođenja. Učitelj ima slobodu u odluci kako i kojim redoslijedom će se ispuniti ciljevi, te koju će dodatnu literaturu i izvore informacija učenici koristiti. Učitelj je odgovoran za inovativan pristup, istraživanje novih izvora znanja i primjereno korištenje novih tehnologija kako bi upotpunio učenje i poučavanje.

Prema navedenom jasno je da Nacionalni kurikulum ne propisuje niti sugerira kako bi se pojedini matematički sadržaji trebali poučavati, a značajno povećava slobodu i odgovornost nastavnika u osmišljavanju nastavnog procesa.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Iskustveno učenje, koje je već prisutno u nastavnom procesu pojedinih učitelja, je postalo problem za veći broj učitelja, a mnogima je potrebna podrška u poduzimanju prvih koraka u novom nastavnom pristupu. Pomoć koja im se pruža je u vidu stručne literature, posebice tekstova koji se bave primjenom iskustvenog učenja u matematičkoj učionici. U nastavku su samo neki od njih, koji su detaljnije opisani.

3.1.1. Primjeri iskustvenog učenja u Hrvatskoj

- MiŠ (Matematika i škola) je stručno-metodički časopis namijenjen učiteljima i nastavnicima matematike i svima ostalima koji su zainteresirani za matematiku. Časopis se objavljuje četiri puta godišnje, a u njemu se mogu pronaći različite teme iz metodike nastave matematike, praktične i kreativne ideje, te najnovija iskustva u edukaciji.

  Primjeri članaka iskustvenog učenja u časopisu MiŠ:
- Lučić, Rad s algebarskim pločicama, Matematika i škola XXI (2020), 105; 207-210.
- B. Majdiš, Računanje površine s pomoću tangram slagalice, Matematika i škola XXI (2020), 103; 102-10.
- A. Dika, Izračunavanje površine mnogokuta s pomoću točkaste mreže, Matematika i škola XX (2019), 98; 137-144. https://mis.element.hr/fajli/1709/98-11.pdf
- P. Valenčić, Matematika – nužno potrebna za život, Matematika i škola XX (2018), 97; 68-71. https://mis.element.hr/fajli/1691/97-04.pdf
- I. Brozović, S. Rukavina, Zome Tool modeli, Matematika i škola XIX (2017), 92; 51-54. https://mis.element.hr/fajli/1605/92-02.pdf
- P. Valenčić, Od ideje do izrade drvenog nastavnog pomagala, Matematika i škola XIX (2017), 92; 55-60. https://mis.element.hr/fajli/1606/92-03.pdf
- S. Ježić, Božićna zvijezda – vertikalno povezivanje, Matematika i škola XIX (2017), 92; 68-72. https://mis.element.hr/fajli/1609/92-06.pdf
- T. Sabo, S. Rukavina, Origami i krivulje drugog reda, Matematika i škola XVIII (2016), 86; 20-22. https://mis.element.hr/fajli/1486/86-05.pdf
- M. Černivec, S. Rukavina, Radionica "Kombinatorne igre", Matematika i škola XIII (2011), 61; 14-16. https://mis.element.hr/fajli/1087/61-04.pdf

- Poučak (https://matematika.hr/izdanja/poucak/): Poučak je časopis za metodiku i nastavu matematike. Osnovalo ga je Hrvatsko matematičko društvo koje promiče matematičku znanost, nastavu matematike na svim razinama, primjenu matematike u drugim disciplinama, kao i unapređivanje društvenog položaja matematičara u cjelini. Časopis se objavljuje četiri puta godišnje.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

- Matka (https://matematika.hr/izdanja/matka/): Matka je časopis namijenjen učenicima osnovnih škola i nižih razreda srednje škole, za njihove učitelje, ali i roditelje. Uključene su različite teme iz geometrije, aritmetike, algebre i povijesti matematike. Nadalje, u časopisu se može pronaći i primjena matematike u drugim znanostima i umjetnosti, zadatci za nadarene učenike, matematičke igre i matematički rebusi. Časopis se objavljuje četiri puta godišnje.

- Acta Mathematica Spalatensia (https://amas.pmfst.unist.hr/ams/): je međunarodni časopis namijenjen objavljivanju članaka iz svih područja čiste i primijenjene matematike. Časopis objavljuje izvorne istraživačke radove i kvalitetne pregledne članke.

  Razvoj znanstvene i matematičke pismenosti korištenjem strategija iskustvenog učenja:

- S. Rukavina, B. Milotić, R. Jurdana-Šepić, M. Žuvić-Butorac, J. Ledić, Razvoj prirodoznanstvene i matematičke pismenosti iskustvenim učenjem, Udruga Zlatni rez, 2010.
- Knjiga “Razvoj znanstvene i matematičke pismenosti korištenjem strategija iskustvenog učenja” opisuje izazove poučavanja prirodnih znanosti i matematike te ističe važnost iskustvenog učenja. Knjiga obuhvaća 12 radionica - 6 radionica vezanih uz matematiku i 6 radionica vezanih uz fiziku.

3.2. Njemačka filozofija

Nacionalni standardi definiraju procese i aktivnosti učenika koji su smjernice za učenje matematike. Nacionalni standardi za matematičko učenje temeljeni na tri osnovna iskustva (Wintera, 1996.). Ova iskustva se mogu okarakterizirati kao (E1) usmjerenost na primjenu, (E2) usmjerenost na strukturu i (E3) usmjerenost na problem.

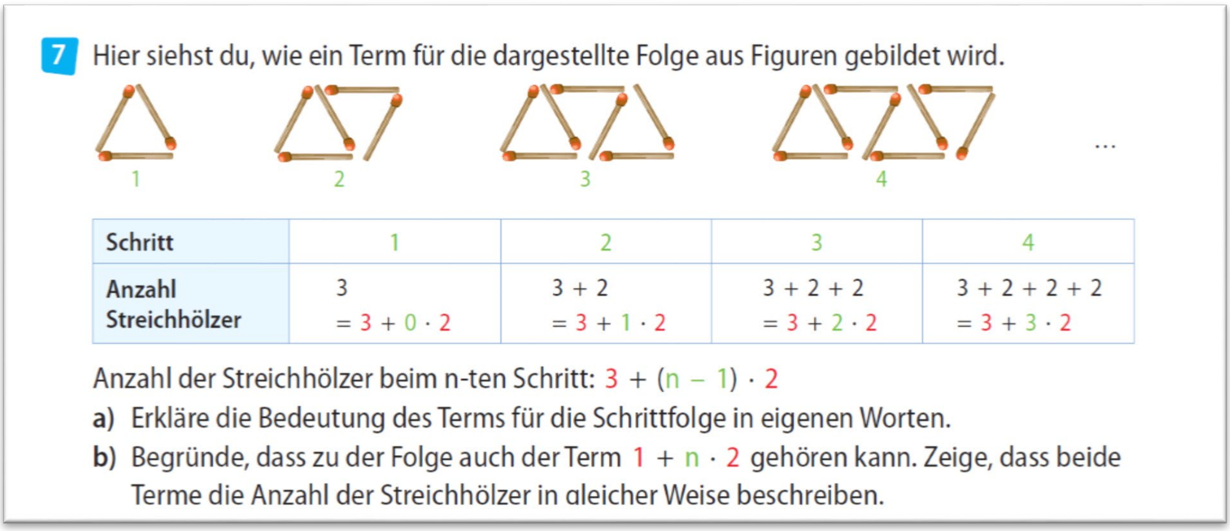
Usmjerenost na primjenu (E1) ne znači direktno pripremu za određene životne situacije, već mogućnost osnovnog uvida u prirodu, društvo i kulturu. Usmjerenost na strukturu (E2) promatra analizu matematičkih objekata u odnosu na deduktivni pogled na svijet. S druge strane, usmjerenost na problem (E3) naglašava stjecanje heurističkih sposobnosti za prepoznavanje i korištenje uzoraka u procesima rješavanja problema. Prethodno navedena tri aspekta su međusobno povezana.

Okruženje za učenje matematike u školi treba omogućiti učenicima stjecanje navedenih iskustva. Iskustveno učenje se može promatrati kao dio (E1) i (E3), gdje učenici dolaze u kontakt s matematikom kao dio svakodnevnih životnih situacija i modeliraju procese. Kako bi se omogućila osnovna iskustva, kompetencije se definiraju kao cilj matematičkog učenja. Kompetencije usmjerene na proces opisuju

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

ključne aktivnosti i procese za razvoj razumijevanja matematike: matematičku argumentaciju (K1), rješavanje problema (K2), matematičko modeliranje (K3), korištenje matematičkih prikaza (K4), korištenje simboličkih, formalnih i tehničkih elemenata matematike (K5) i matematičku komunikaciju (K6).

3.2.1. Primjeri iskustvenog učenja u Njemačkoj



7 Hier siehst du, wie ein Term für die dargestellte Folge aus Figuren gebildet wird.

1 2 3 4 ...

Schritt	1	2	3	4
Anzahl Streichhölzer	3 $= 3 + 0 \cdot 2$	$3 + 2$ $= 3 + 1 \cdot 2$	$3 + 2 + 2$ $= 3 + 2 \cdot 2$	$3 + 2 + 2 + 2$ $= 3 + 3 \cdot 2$

Anzahl der Streichhölzer beim n-ten Schritt: $3 + (n - 1) \cdot 2$

a) Erkläre die Bedeutung des Terms für die Schrittfolge in eigenen Worten.

b) Begründe, dass zu der Folge auch der Term $1 + n \cdot 2$ gehören kann. Zeige, dass beide Terme die Anzahl der Streichhölzer in gleicher Weise beschreiben.

Slika 6: Iskustveno učenje iz udžbenika.

U području iskustvenog učenja u nacionalnim standardima i kurikulumima opisani su sljedeći aspekti kompetencija:

- *matematička argumentacija (K1): Ova kompetencija uključuje razumijevanje i vrednovanje matematičkih dokaza, razvoj nizova matematičkih argumentacija i pretpostavki.*

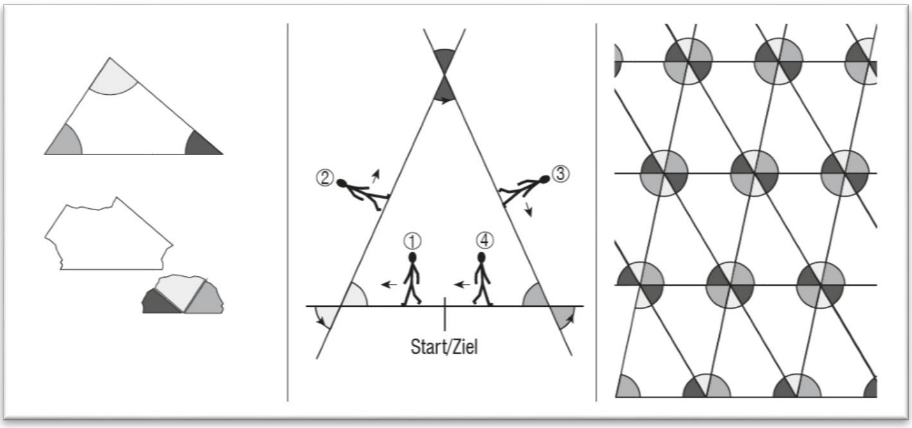
  Za iskustveno učenje ova je kompetencija duboko povezana s Brunerovim E-I-S principom kroz rad s konkretnim objektima, a u svrhu matematičkih pretpostavki i argumentacije.

Slika 7: Primjer iskustvenog učenja za eksponencijalnu funkciju

- *rješavanje problema (K2): Ova kompetencija uključuje korištenje strategija i heuristike za rješavanje matematičkih problema i njihove primjene. Navedeno može uključivati poznate strategije i pokušaje povezivanja s novim strategijama. Rješenja i rezultati se provjeravaju i provodi se kritički osvrt.*

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Ova kompetencija opisuje meta-razinu matematičkog rada. Što se tiče iskustvenog učenja, mogu se pronaći i iskustvene strategije za sustavno dokazivanje matematičkih problema.



Slika 8: Primjer iskustvenog učenja za zbroj mjera kutova u trokutu..

- *matematičko modeliranje (K3): Ova kompetencija uključuje vezu između matematike i situacija iz svakodnevnog života, kao i pojmove, metode i modele.*
  Za iskustveno učenje, ova veza između stvarnog i matematičkog svijeta je ključni aspekt za opisivanje, pronalaženje i korištenje matematičkih pojmova i modela za razumijevanje dane iskustvene situacije i zadatka.
- *korištenje matematičkih prikaza (K4): Ova kompetencija uključuje prikaz, njegov odabir, diferencijaciju i izradu vrsta prikaza.*
  Za iskustveno učenje Brunerov princip E-I-S duboko je povezan s ovom kompetencijom.
- *korištenje simboličkih, formalnih i tehničkih elemenata matematike (K5): ova kompetencija uključuje činjenice i matematička pravila, primjenu algoritama za algebarske i geometrijske operacije. Razumna uporaba matematičkih alata je dio ove kompetencije.*
  Za iskustveno učenje, prilikom rješavanja iskustvenih zadataka, potrebno je imati na umu matematička pravila.
- *matematička komunikacija (K6): Ova kompetencija uključuje razumijevanje matematičkih informacija koje su dane verbalno i u pisanom obliku. Priprema rješenja, te korištenje matematičkih pojmova s obzirom na različitu publiku, također su dio ove kompetencije.*
  Za iskustveno učenje spomenuta kompetencija uključuje komunikacijski proces: od razumijevanja zadanih zadataka ili situacije do dokumentiranja (npr. korištenje ili izrada matematičkih videa).

3.3. Litvanska filozofija

Prema projektu matematičkog programa (2021.), predmet matematike u školi ima jedinstvenu ulogu u razvoju učeničkih sposobnosti računanja, apstraktnog, logičkog, vizualnog i prostornog mišljenja, analize i interpretacije podataka, te sposobnosti apstrakcije.

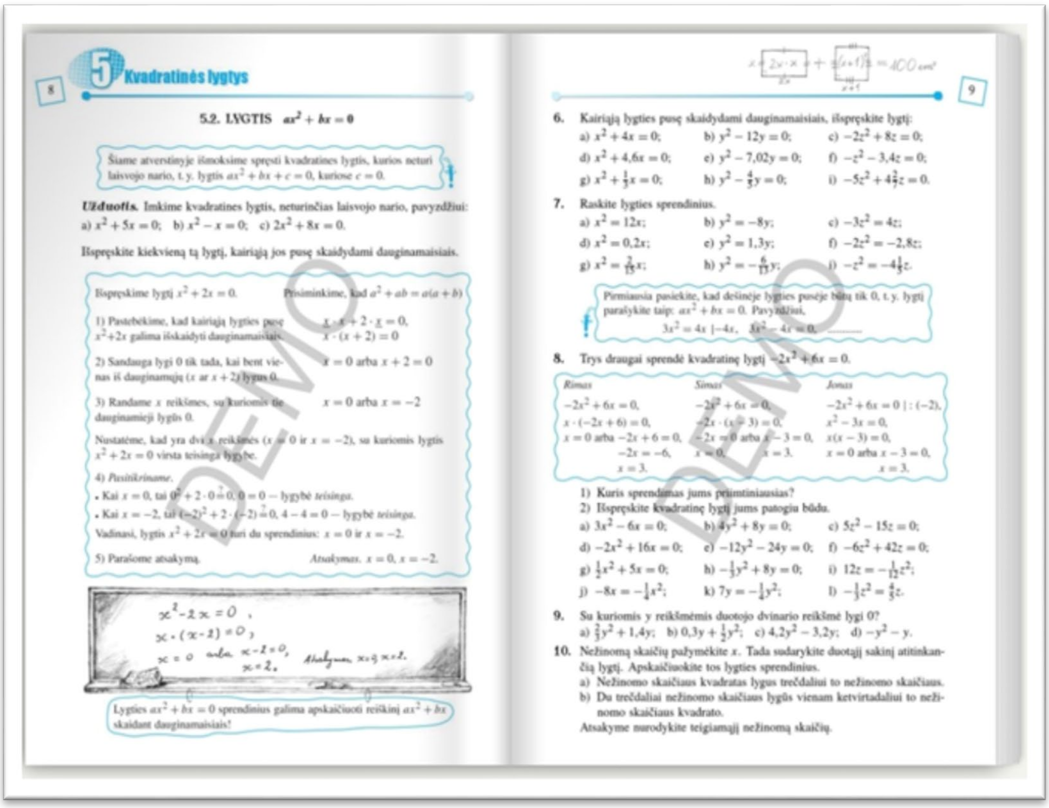
This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Ciljevi srednjoškolskog matematičkog obrazovanja su sljedeći. Učenici će:

- pravilno i svrhovito koristiti matematičke pojmove, naznačiti i objasniti veze među njima;
- bez poteškoća provoditi matematičke postupke;
- prepoznati i primijeniti matematičko rasuđivanje u različitim kontekstima;
- odgovorno i učinkovito organizirati aktivnosti učenja;
- učinkovito komunicirati matematičkim jezikom;
- uočiti veze između matematike i drugih predmeta;
- koristiti digitalnu tehnologiju za učenje matematike;
- biti samouvjereni, surađivati, kritički promišljati i učinkovito prilagođavati stečena znanja i vještine iz matematike prilikom rješenja problema koje razumiju u različitim kontekstima.

U svim razredima, od prvog do dvanaestog, postignuća učenika se projiciraju u tri područja postignuća: duboko razumijevanje i rasuđivanje, matematička komunikacija i rješavanje problema.

Iako nacionalni program matematike naglašava važnost razvoja kompetencije kreativnog mišljenja, većina sati matematike je standardnog tipa: zadaci su iz udžbenika/priručnika, pripadna rješenja objašnjava učitelj. U nastavku je naveden primjer iz udžbenika za 9. razred:



8

5 Kvadratinės lygtys

5.2. LYGTIS $ax^2 + bx = 0$

Šiame atverstinyje išmoksime spręsti kvadratines lygtis, kurios neturi laisvojo nario, t. y. lygtis $ax^2 + bx + c = 0$, kuriose $c = 0$.

Užduotis. Imkime kvadratines lygtis, neturinčias laisvojo nario, pavyzdžiui: a) $x^2 + 5x = 0$; b) $x^2 - x = 0$; c) $2x^2 + 8x = 0$.

Išspręskite kiekvieną tą lygtį, kairiąją jos pusę skaidydami dauginamaisiais.

Išspręskime lygtį $x^2 + 2x = 0$. Prisiminkime, kad $a^2 + ab = a(a + b)$

1) Pastebėkime, kad kairiąją lygties pusę x^2+2x galima išskaidyti dauginamaisiais. $x \cdot x + 2 \cdot x = 0$, $x \cdot (x + 2) = 0$

2) Sandauga lygi 0 tik tada, kai bent vienas iš dauginamųjų (x ar $x + 2$) lygus 0. $x = 0$ arba $x + 2 = 0$

3) Randame x reikšmes, su kuriomis tie dauginamieji lygūs 0. $x = 0$ arba $x = -2$

Nustatėme, kad yra dvi x reikšmės ($x = 0$ ir $x = -2$), su kuriomis lygtis $x^2 + 2x = 0$ virsta teisinga lygybe.

4) *Pasitikriname.*

- Kai $x = 0$, tai $0^2 + 2 \cdot 0 \stackrel{?}{=} 0$, $0 = 0$ – lygybė *teisinga*.
- Kai $x = -2$, tai $(-2)^2 + 2 \cdot (-2) \stackrel{?}{=} 0$, $4 - 4 = 0$ – lygybė *teisinga*.

Vadinasi, lygtis $x^2 + 2x = 0$ turi du sprendinius: $x = 0$ ir $x = -2$.

5) Parašome atsakymą. *Atsakymas.* $x = 0$, $x = -2$.

$x^2 - 2x = 0$,
$x \cdot (x - 2) = 0$,
$x = 0$ arba $x - 2 = 0$,
$x = 2$. Atsakymas. $x = 0$; $x = 2$.

Lygties $ax^2 + bx = 0$ sprendinius galima apskaičiuoti reiškinį $ax^2 + bx$ skaidant dauginamaisiais!

9

6. Kairiąją lygties pusę skaidydami dauginamaisiais, išspręskite lygtį:
a) $x^2 + 4x = 0$; b) $y^2 - 12y = 0$; c) $-2z^2 + 8z = 0$;
d) $x^2 + 4{,}6x = 0$; e) $y^2 - 7{,}02y = 0$; f) $-z^2 - 3{,}4z = 0$;
g) $x^2 + \frac{1}{3}x = 0$; h) $y^2 - \frac{4}{5}y = 0$; i) $-5z^2 + 4\frac{2}{7}z = 0$.

7. Raskite lygties sprendinius.
a) $x^2 = 12x$; b) $y^2 = -8y$; c) $-3z^2 = 4z$;
d) $x^2 = 0{,}2x$; e) $y^2 = 1{,}3y$; f) $-2z^2 = -2{,}8z$;
g) $x^2 = \frac{2}{15}x$; h) $y^2 = -\frac{6}{13}y$; i) $-z^2 = -4\frac{1}{5}z$.

Pirmiausia pasiekite, kad dešinėje lygties pusėje būtų tik 0, t. y. lygtį parašykite taip: $ax^2 + bx = 0$. Pavyzdžiui,
$3x^2 = 4x \mid -4x$, $3x^2 - 4x = 0$.

8. Trys draugai sprendė kvadratinę lygtį $-2x^2 + 6x = 0$.

Rimas	Simas	Jonas
$-2x^2 + 6x = 0$,	$-2x^2 + 6x = 0$,	$-2x^2 + 6x = 0 \mid : (-2)$,
$x \cdot (-2x + 6) = 0$,	$-2x \cdot (x - 3) = 0$,	$x^2 - 3x = 0$,
$x = 0$ arba $-2x + 6 = 0$,	$-2x = 0$ arba $x - 3 = 0$,	$x(x - 3) = 0$,
$-2x = -6$,	$x = 0$, $x = 3$.	$x = 0$ arba $x - 3 = 0$,
$x = 3$.		$x = 3$.

1) Kuris sprendimas jums priimtiniausias?
2) Išspręskite kvadratinę lygtį jums patogiu būdu.
a) $3x^2 - 6x = 0$; b) $4y^2 + 8y = 0$; c) $5z^2 - 15z = 0$;
d) $-2x^2 + 16x = 0$; e) $-12y^2 - 24y = 0$; f) $-6z^2 + 42z = 0$;
g) $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 0$; h) $-\frac{1}{3}y^2 + 8y = 0$; i) $12z = -\frac{1}{12}z^2$;
j) $-8x = -\frac{1}{4}x^2$; k) $7y = -\frac{1}{4}y^2$; l) $-\frac{1}{3}z^2 = \frac{4}{5}z$.

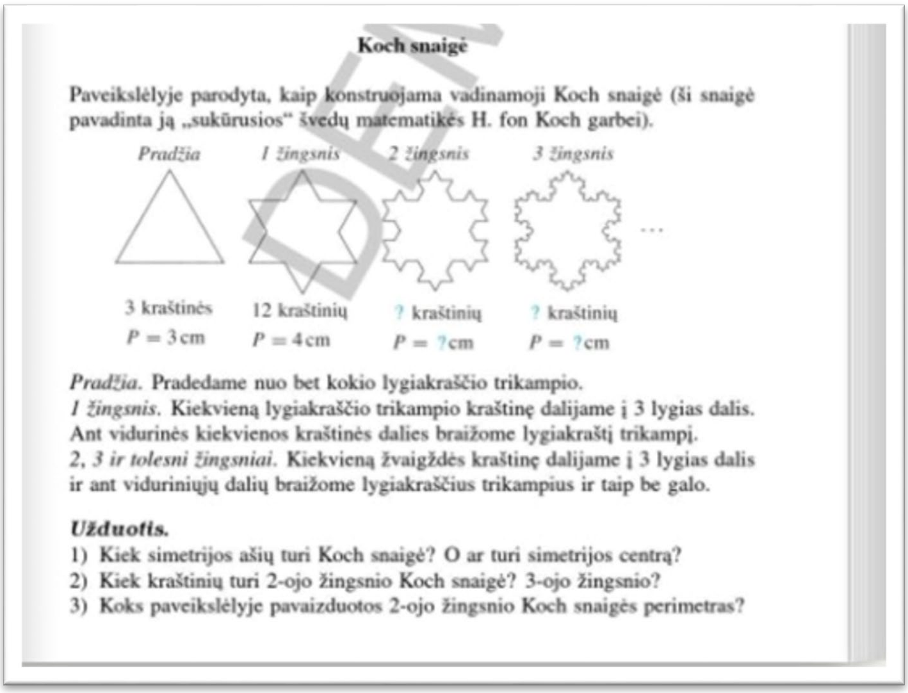
9. Su kuriomis y reikšmėmis duotojo dvinario reikšmė lygi 0?
a) $\frac{2}{3}y^2 + 1{,}4y$; b) $0{,}3y + \frac{1}{2}y^2$; c) $4{,}2y^2 - 3{,}2y$; d) $-y^2 - y$.

10. Nežinomą skaičių pažymėkite x. Tada sudarykite duotąjį sakinį atitinkančią lygtį. Apskaičiuokite tos lygties sprendinius.
a) Nežinomo skaičiaus kvadratas lygus trečdaliui to nežinomo skaičiaus.
b) Du trečdaliai nežinomo skaičiaus lygūs vienam ketvirtadaliui to nežinomo skaičiaus kvadrato.
Atsakyme nurodykite teigiamąjį nežinomą skaičių.

Slika 9: Primjeri kreativnog mišljenja

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Zadaci iz matematike mogu sadržavati praktične aspekte. Primjerice u zadatku iz matematike za učenike 8. razreda u kojem je opisano kako se kreira Kochova pahuljica (ali se ne traži od učenika da je sami naprave) te je potrebno izračunavati vrijednosti različitih parametara. Zadaci mogu tražiti rješenja za određenu životnu situaciju spomenutu u zadatku, na primjer, izračunati udaljenost itd.



Koch snaigė

Paveikslėlyje parodyta, kaip konstruojama vadinamoji Koch snaigė (ši snaigė pavadinta ją „sukūrusios" švedų matematikės H. fon Koch garbei).

Pradžia	*1 žingsnis*	*2 žingsnis*	*3 žingsnis*
3 kraštinės	12 kraštinių	? kraštinių	? kraštinių
$P = 3$ cm	$P = 4$ cm	$P = ?$ cm	$P = ?$ cm

Pradžia. Pradedame nuo bet kokio lygiakraščio trikampio.
1 žingsnis. Kiekvieną lygiakraščio trikampio kraštinę dalijame į 3 lygias dalis. Ant vidurinės kiekvienos kraštinės dalies braižome lygiakraštį trikampį.
2, 3 ir tolesni žingsniai. Kiekvieną žvaigždės kraštinę dalijame į 3 lygias dalis ir ant viduriniųjų dalių braižome lygiakraščius trikampius ir taip be galo.

Užduotis.
1) Kiek simetrijos ašių turi Koch snaigė? O ar turi simetrijos centrą?
2) Kiek kraštinių turi 2-ojo žingsnio Koch snaigė? 3-ojo žingsnio?
3) Koks paveikslėlyje pavaizduotos 2-ojo žingsnio Koch snaigės perimetras?

Slika10: Primjeri metoda aktivnog učenja

Postoje i iskustvene metode učenja: grupni rad, projektno istraživanje, natjecanja, rasprave, prilagodba informatičkih alata (izrada umnih mapa, kvizova, logičkih igara, križaljki, korištenje 3D figura i sl.). S obzirom na činjenicu da su ispiti iz matematike pismeni te da sadrže puno računanja, glavni zadatak nastavnika matematike je pružiti učenicima razumijevanje i vještine kako brzo izračunati, a u svrhu rješavanja što više zadataka. Učenicima osnovnih škola pruža se više iskustvenih zadataka jer ima više vremena i slobode za rad na kreativnim zadacima – crtanje, izradu raznih figura i sl.

Desetljećima se u znanstvenoj literaturi analizira važnost i načini kako bi se poučavanje i učenje matematike učinilo kreativnijim. Na primjer, kako nacrtati mačku pomoću krivulja i funkcija (za učenike 9. razreda).

Biekšienė, R., ir Zenkevičienė M. (2000). Aktyvaus mokymosi metodai matematikos pamokose. α+ώ, Nr. 2, 52-56 (Slika 11):

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

I koordinatiniame ketvirtyje:

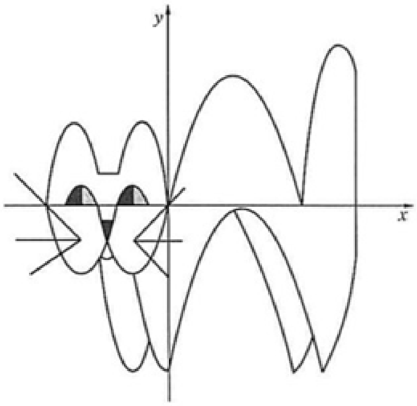
1) $y = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 8$, kai $0 \leqslant x \leqslant 8$;
2) $y = -2(x-10)^2 + 10$, kai $7{,}8 \leqslant x \leqslant 11$;
3) $x = 11$, kai $0 \leqslant y \leqslant 8{,}2$;
4) $y = x$, kai $0 \leqslant x \leqslant 1$;
5) $y = -2(x+1{,}5)^2 + 5{,}2$, kai $0 \leqslant x \leqslant 0{,}2$.

II koordinatiniame ketvirtyje:

1) $y = -x - 7$, kai $-9 \leqslant x \leqslant -7$;
2) $y = -2(x+1{,}5)^2 + 5{,}2$, kai $-2{,}8 \leqslant x \leqslant 0$;
3) $y = -2(x+5{,}5)^2 + 5{,}2$, kai $-7{,}2 \leqslant x \leqslant -4$;
4) $y = 2$, kai $-4 \leqslant x \leqslant -2{,}8$;
5) $y = -2(x+2)^2 + 1{,}2$, kai $-2{,}8 \leqslant x \leqslant -1{,}2$;
6) $y = -2(x+5)^2 + 1{,}2$, kai $-5{,}8 \leqslant x \leqslant -4{,}2$;
7) $y = 0$, kai $-5{,}8 \leqslant x \leqslant -4{,}2$;
8) $y = -5$, kai $0 \leqslant x \leqslant 1{,}2$ (nuspalvinkite dešiniąją akies pusę pilkai, o kairiąją — juodai);
9) $y = 0$, kai $-2{,}8 \leqslant x \leqslant -1{,}2$;
10) $x = -2$, kai $0 \leqslant x \leqslant 1{,}2$ (nuspalvinkite dešiniąją akies pusę pilkai, o kairiąją — juodai).

III koordinatiniame ketvirtyje:

1) $y = (x+2)^2 - 4$, kai $-4 \leqslant x \leqslant 0$;
2) $y = (x+5)^2 - 4$, kai $-7{,}2 \leqslant x \leqslant -3$;
3) $y = -1$, kai $-3{,}8 \leqslant x \leqslant -3{,}2$ (nuspalvinkite nosį juodai);
4) $y = 2(x+3{,}5)^2 - 3$, kai $-3{,}8 \leqslant x \leqslant -3{,}2$ (nuspalvinkite liežuvį pilkai);
5) $y = 2x^2 - 10$, kai $-1{,}8 \leqslant x \leqslant 0$;
6) $y = 2(x+2)^2 - 10$, kai $-4 \leqslant x \leqslant -1$;
7) $y = -2$, kai $-9 \leqslant x \leqslant -5$, $-2 \leqslant x \leqslant 0$;



8) $y = x$, kai $-2 \leqslant x \leqslant 0$;
9) $y = -x - 4$, kai $-2 \leqslant x \leqslant 0$;
10) $y = -x - 7$, kai $-7 \leqslant x \leqslant -5$;
11) $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$, kai $-8 \leqslant x \leqslant -5$.

IV koordinatiniame ketvirtyje:

1) $y = -\frac{1}{2}(x-4{,}5)^2$, kai $0 \leqslant x \leqslant 9$;
2) $y = -\frac{1}{2}(x+2{,}5)^2 + 1$, kai $4 \leqslant x \leqslant 7{,}4$;
3) $y = 2(x-9)^2 - 10$, kai $9 \leqslant x \leqslant 11$;
4) $x = 11$, kai $-3 \leqslant y \leqslant 0$;
5) $y = 2(x-7{,}4)^2 - 10$, kai $7{,}4 \leqslant x \leqslant 8{,}5$;
6) $y = -2$, kai $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Slika 11: Primjer kreativnog mišljenja kroz grafove funkcija

2020. godine samo 67.61% učenika u Litvi je položilo ispit iz matematike (u usporedbi s 2019. – 82.09% učenika). Učenici srednjih škola koji nisu položili ispit naglašavaju kako su uvijek bili loši na satovima matematike i ne misle da im treba puno matematike u životu. Navedeno otkriva značajnu važnost uključivanja iskustvenog pristupa učenju, a u svrhu boljeg razumijevanja matematike. Osim toga, učitelji matematike bi trebali imati sustavniji pristup iskustvenom poučavanju matematike kako bi pomogli učenicima u shvaćanju važnosti matematike u njihovom životu i kako bi razvili svoje kompetencije u rješavanju matematičkih problema.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

3.4. Španjolska filozofija

Škole u Španjolskoj, bilo privatne ili javne, imaju sličan model poučavanja u kojem iskustveno učenje nije zastupljeno. Nakon iscrpne potrage za školama koje podučavaju s iskustvenim pristupom, teško je bilo pronaći instituciju koja iskustveno učenje koristi u svom procesu poučavanja. Pristup koji najviše nalikuje iskustvenom učenju je Montessori metoda, koja se sve više koristi u Španjolskoj.

S obzirom na činjenicu da je sve češća potražnja za alternativnim školama u kojima je poučavanje usmjereno na učenika i učenju o emocijama i razvoju drugih inteligencija, šireći fokus izvan teorijskog znanja koje je oduvijek postojalo u školama, došlo je do promjene u pedagogiji u mnogim institucijama i školama. Zbog navedenog, i zbog sve veće otvorenosti u pedagogiji, kao i nedostatka zastupljenosti iskustvenog učenja u španjolskim školama, EnLeMaH projekt je prikladan za Španjolsku. Pristup iskustvenog učenja je pogodan za učitelje koji neprestano pokušavaju otvoriti nove načine pristupa učenicima, te će im ovaj projekt omogućiti nove alate koji su uspješni i provjerni u drugim zemljama.

Neke španjolske škole i institucije počinju uvoditi novine povezane s učenjem temeljenim na projektima, u kojem se sve više cijene transverzalne kompetencije, kao i stvaranje, te rad u grupama za sadržaj koji se uči. Neke od najvažnijih škola i institucija u Španjolskoj zbog svojih novina su:

- Escuela Ideo, Madrid: rade kroz projektni model učenja. Njihova dva osnovna principa su grupni rad za učenje i učenje kroz rad.
- Fundación Myland, Seville: navedena škola trenutno gradi zgradu u kojoj će biti smještena srednja škola. Njihova se pedagogija temelji na iskustvenom učenju, što učenicima olakšava stjecanje znanja kroz učenje kroz rad.
- Colegio San Gregorio, Plasencia: Subvencionirani obrazovni centar s učenicima od 0 do 18 godina. Cilj nastavnog osoblja je strukturirati učenje kroz projekte i iskustvene metodologije. Potiče se emocionalni odgoj, te se u osnovnoškolskom obrazovanju koristi metodologija Heroes Tic, koja učenike čini protagonistima njihovog iskustvenog učenja. Ključno je da se koriste kooperativne grupe i da se napredak učenika bilježi u digitalnim blogovima učenika.
- Colegio Amara Berri: Obrazovna metodologija Centra ima ciklusne programe temeljene na dobi, a posebna se pažnja posvećuje poučavanju učenika načinu organiziranja njihova razmišljanja i metoda za njihov razvoj, te radu na učenikovom samopoštovanju i promicanju timskog rada. Gamifikacija i praktična primjena teorijskog znanja imaju važnu ulogu.

U Španjolskoj postoji mnogo Montessori škola, ali poučavanje učenika je najčešće do 12 godina. Iako je metoda vrlo slična iskustvenom učenju, dobni raspon nije jednak.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Zaključimo, projekt EnLeMaH će imati vrlo značajan i neophodan utjecaj na španjolsku pedagogiju jer će nastavnicima pružiti brojne alate i savjete za prilagodbu sadržaja potrebama učenja svojih učenika, čineći njihovo poučavanje puno produktivnijim nego što je bilo do sada.

3.5. Zaključak

Iz prethodnog poglavlja mogu se uočiti razlike u načinima na kojima se temelji iskustveno učenje u školi u različitim državama. Razlike mogu biti više u načinu provedbe iskustvenog učenja nego u načinu isticanja nužnosti iskustvenog učenja u školi. U svim državama proces integracije nastavnika u ovu filozofiju je važno pitanje za uspostavljanje iskustvenog učenja u školi. U ovom području EnLeMaH-projekt je dio strategije i filozofije svake države.

4. EnLeMaH i kriteriji za iskustveno učenje

Na temelju poglavlja 1. i 3., sljedeći kriteriji će biti temelj za iskustveno učenje u sklopu EnLeMaH projekta za stvaranje situacija iskustvenog učenja.
Aspekti iskustvenog prikaza, eksperimentalno stajalište i filozofija iskustvenog učenja će biti povezani u sljedeće kriterije:

- Stvarni objekt: Okolina za učenje mora sadržavati stvarne objekte. (Računalne aktivnosti (kao što je GeoGebra) ne smatraju se iskustvenim učenjem).
- Aktivnost: Radnja je aktivan proces. Učenici ne bi trebali biti pasivni primatelji, već bi trebali biti aktivno uključeni u proces učenja (npr. gledati provođenje eksperimenta, a ne provoditi ga samostalno). (Učenici moraju biti uključeni u aktivnosti.) Učenici moraju biti aktivni u svakom koraku aktivnosti.
- Školski sat: Aktivnosti za iskustveno učenje mogu biti sadržane u svakom dijelu školskog sata (npr. uvod, učenje novog sadržaja, vježba, završni dio...).
- Materijal: Potreban materijal mora biti dostupan učenicima kod kuće (ili u razredu).
- Priprema aktivnosti za iskustveno učenje kod kuće: sinkrono (uživo) i asinkrono (samoučenje bez prezentacije uživo). Priprema za iskustveno učenje kod kuće daje učiteljima priliku za izradu različitih vrsta okruženja za učenje na daljinu.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

5. Predložak za EnLeMaH

Sljedeći predložak bi trebao biti temelj za osmišljenu aktivnost koja se temelji na iskustvenom učenju. U svrhu jednostavnog korištenja aktivnosti za učitelje iz drugih država ili izvan EnLeMaH-projekta promotrit će se različiti aspekti nastave. Predložak omogućuje učiteljima razumijevanje aktivnosti i njenu prilagodbu u vlastitom razredu.

Table 7: Predložak za EnleMaH

Naziv aktivnosti
Sažetak (na materinjem jeziku)
Sažetak (na engleskom)
Svrha zadatka (uvod, vježba, ponavljanje...)
Ishodi učenja
Predznanje učenika
Potreban materijal
Očekivano vrijeme za aktivnost

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Očekivano vrijeme za pripremu
Kratki opis aktivnosti (opis aktivnosti treba podijeliti u nekoliko dijelova, u ovisnosti o zadacima. Treba predvidjeti trajanje svakog dijela)
Zadaci za učenike (trebaju biti sadržani u zasebnom dokumentu)
Rješenje (treba biti sadržano u zasebnom dokumentu)
Napomene (savjeti, poteškoće, upravljanje razredom, diferencijacija, mogućnosti proširenja aktivnosti)

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Literatura

Brown, L. (2015). Researching as an enactivist mathematics education researcher. *ZDM Mathematics Education, 47*, 185–196.

Bruner, J. S. (1966). Toward a theory of instruction. Cambridge, Mass.: Belkapp Press.

Coles, A., & Brown, L. (2013) Making distinctions in task design and student activity. In C. Margolinas (Ed.) *Task design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22* (pp. 183–192). https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054

Di Paolo, E. (2018)."Enactivismo". *En Diccionario Interdisciplinar Austral, editado por Claudia E. Vanney, Ignacio Silva y Juan F. Franck.* URL=http://dia.austral.edu.ar/Enactivismo

Francis, Krista & Khan, Steven & Davis, Brent. (2016). Enactivism, Spatial Reasoning and Coding. Digital Experiences in Mathematics Education. 2. 10.1007/s40751-015-0010-4.

Maturana, H., & Varela, F. (1992). *The Tree of Knowledge: The biological roots of human understanding.* Boston MA: Shambhala. (First edition published 1987).

Maturana, H. (1987), "Everything is Said by an Observer", en W. I. Thompson (ed.), GAIA, A Way of Knowing: Political Implications of the New Biology, Hudson, N.Y., Lindisfarne Press, pp. 65-82.

Lozano, María Dolores (2014). La perspectiva enactivista en educación matemática: todo hacer es conocer. *Educación Matemática*, 162-182. [Fecha de consulta 11 de Octubre de 2021]. ISSN: 0187-8298. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40540854009

Reid, D. (1996). Enactivism as a methodology. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the twentieth annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 203–210). Valencia: PME.

Schunk, D. (2012). *Learning theories.* An educational perspective. Boston, Mass: Pearson.

Varela, F., Thompson, E., & Rosch, E. (1991). *The embodied mind: cognitive science and human experience.* Cambridge: MIT Press.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.